

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



TESIS DOCTORAL

Metodología multiobjetivo aplicada a análisis de datos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Nuria Martínez Arjona

Directora

María Inés Sobrón Fernández

Madrid, 2016

METODOLOGÍA MULTI OBJETIVO APLICADA A

ANÁLISIS DE DATOS

Nuria Martínez Arjona

PRÓLOGO

Los seres humanos tienen que tomar decisiones casi continuamente. La mayoría de estas decisiones, se toman por simple rutina y no necesitan de ningún análisis sofisticado; sin embargo, en muchas situaciones, se presentan importantes problemas que exigen garantizar una buena decisión.

Por ejemplo, la adquisición de un objeto valioso depende de muchos factores. Cuando se debe elegir entre varios objetos, y sobre los objetos se consideran varios objetivos en conflicto, se tiene un problema de decisión multiobjetivo.

Los problemas de programación multiobjetivo se caracterizan por los siguientes elementos: (1) El conjunto de objetos O ; (2) Las características (o atributos) que se consideran sobre los objetos, medidas por las variables (V_i) , $i \in I$, cuya imagen es el conjunto de alternativas X ; (3) Los n objetivos $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ que se definen sobre el espacio de alternativas X y toman sus valores en los números reales; (4) El espacio de resultados Y que es la imagen del espacio de alternativas X mediante los objetivos; y (5) la estructura de preferencias del decisor EP que se construye sobre el espacio de resultados Y . La estructura de preferencias ordena parcialmente las alternativas, pero dicha ordenación usualmente no es suficiente para, sólo con ella, hallar la solución del problema multiobjetivo. Por ello, es necesario hacer refinamientos de la estructura de preferencias del decisor EP , para poder hallar la solución del problema. En el estudio del problema, se desarrollan diversas formas de refinamiento de las estructuras de preferencia, como son las estructuras de dominación, óptimos de Pareto, función de valor, técnicas satisfactores, soluciones de compromiso, técnicas interactivas y técnicas out-ranking.

Resolver un problema multiobjetivo, planteado mediante un séxtuple (O, V, X, f, Y, EP) , donde O es el conjunto de objetos, V representa las variables que miden sobre los objetos sus características relevantes, X es el espacio de alternativas, f representa la familia de objetivos, Y es el espacio de resultados y EP es la estructura de preferencias del decisor; consiste en aplicar una técnica mediante la cual se seleccione uno, o varios objetos, que sean los mejores para el decisor.

Ser lo mejor para el decisor, significa que éste debe sentirse plenamente satisfecho con la elección. El objeto que maximice una determinada función objetivo propuesta por un excelente analista, no tiene por qué ser la solución del problema multiobjetivo. Puede ocurrir, que la función objetivo no sea acorde con los deseos del decisor. Conseguir una buena concordancia entre decisor y analista no suele ser una tarea fácil. La dificultad de lograr dicha concordancia, ha obligado al desarrollo de muchas técnicas multiobjetivo.

La investigación que se presenta, se estructura en cuatro capítulos. De ellos, los dos primeros se dedican al planteamiento, estudio y resolución del problema multiobjetivo. Los capítulos, tercero y cuarto, son completamente originales, y se dedican a la aplicación de la programación multiobjetivo al análisis de datos.

En el capítulo 1, en la introducción, se exponen ejemplos sobre programación multiobjetivo, que sirven para introducir el lenguaje apropiado sobre el tema objeto de la investigación. Después, se analizan las Estructuras de Preferencia del decisor, que se utilizan para obtener algún tipo de ordenación sobre los objetos. A continuación, se caracterizan, por sus propiedades, diferentes estructuras de preferencia. Se continúa con la formulación del problema multiobjetivo y el análisis de los distintos enfoques de resolución del problema; es decir, exponiendo las distintas formas del concepto de solución. El capítulo finaliza estudiando las metodologías que permiten realizar refinamientos sobre las estructuras de preferencia del decisor, con el fin de poder hallar la solución del problema. Se consideran Estructuras de Dominación, Óptimos de Pareto, Función de Valor, Soluciones Satisfacientes, Soluciones de Compromiso, Técnicas Interactivas y Técnicas Out-Ranking. Se finaliza el capítulo, con un breve comentario sobre el simplex multiobjetivo.

El capítulo 2, se dedica al desarrollo de las distintas técnicas que se utilizan para resolver programas multiobjetivo. En la introducción, se presenta la formulación del problema multiobjetivo. El segundo epígrafe, se dedica a exponer la técnica clásica de resolución del problema, mediante la maximización de una función de valor. El objeto que maximiza la función de valor, es el mejor para el decisor, cuando éste ha aceptado dicha función. En el tercer epígrafe, se expone como se hallan las soluciones por técnicas satisfacientes y de compromiso. Se desarrollan distintas técnicas satisfacientes y, entre las técnicas de compromiso, se consideran las formuladas mediante las distancias L_1 ponderada, L_q ponderada, L_∞ ponderada y la denominada *programación por metas*. En el epígrafe cuarto, se exponen los conceptos que permiten desarrollar las técnicas interactivas. Se detallan los elementos necesarios para la descripción de estas técnicas, destacando el esencial concepto de *punto ideal*. Se explican los principales conceptos que tienen por fundamento las distintas distancias consideradas. El epígrafe quinto, se dedica al desarrollo de técnicas interactivas. Se explican la técnica lineal ponderada, la técnica de Tchebycheff y la técnica del valor absoluto ponderado. Se exponen otras técnicas, que son variaciones de estas tres técnicas fundamentales. El epígrafe sexto, se dedica a la adaptación de técnicas interactivas generales, para la resolución de problemas multiatributo, considerando la técnica de las ponderaciones y la técnica de Tchebycheff, para la resolución de este tipo de problemas. Se expone, como técnica general, el algoritmo de Marcotte y Soland. Finalmente, el epígrafe séptimo, se dedica a la explicación de las técnicas *out-ranking*, desarrollando fundamentalmente las metodologías de los algoritmos *ELECTRE* y *PROMETHEE*.

El capítulo 3, se dedica al análisis de datos obtenidos en investigaciones con Diseños de Experimentos. Cuando se dispone de un espacio poblacional Ω formado por unidades experimentales homogéneas, y se desea experimentar con t tratamientos, se toman, mediante muestreo aleatorio simple, t muestras, denominadas M_1, M_2, \dots, M_t . Las unidades experimentales de la muestra M_i se tratan con el tratamiento T_i , para $i = 1, 2, \dots, t$. Después de aplicar el correspondiente tratamiento y dejar que surta efecto sobre las unidades experimentales, se mide dicho efecto mediante las variables respuesta $R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_n$. No es difícil determinar qué tratamiento es el mejor respecto de cada una de las variables respuesta, pero suele suceder que dicho tratamiento no es el mismo para todas las variables. A la resolución de este problema,

que se plantea en la introducción, en algunos casos concretos, se dedica el capítulo tercero. Además de la introducción, este capítulo consta de los siguientes apartados. En el epígrafe segundo, se formulan los correspondientes problemas multiobjetivo asociados con estas situaciones. En el tercer epígrafe se analizan los modelos discretos. En el cuarto, se formulan los modelos paramétricos, centrándose el estudio esencialmente en el modelo normal. En el quinto epígrafe, se analizan los modelos no paramétricos y finalmente, en el sexto, se consideran los modelos mixtos. Se completa el capítulo, con el análisis de algunos casos prácticos.

El capítulo 4, se dedica a explicar técnicas de utilidad en la validación de cuestionarios. En la introducción se expone cómo pueden aplicarse dichas técnicas. En la actualidad, gran número de investigaciones se realizan a partir de cuestionarios. Los cuestionarios deben ser respondidos por personas pertenecientes a una determinada población, convenientemente elegida. Dichas personas son las unidades experimentales. De la población, por muestreo aleatorio, se seleccionan las unidades experimentales que deben responder al cuestionario. Los datos que se obtienen, son las respuestas que las personas entrevistadas han dado a las cuestiones formuladas. Se considera el análisis de estos datos, que tiene por objeto obtener una medida sobre la validez del cuestionario. Esta medida consiste en contrastar la consistencia entre el diseño del cuestionario y las respuestas dadas por las unidades experimentales pertenecientes a la muestra. Para dicho contraste, se suele utilizar alguna técnica cluster aplicada a las variables. Por tanto, en este tipo de análisis de datos, se consideran las variables como unidades experimentales. Para cada par de variables, se mide algún coeficiente de desemejanza en función de las respuestas dadas a estas dos variables, por las unidades experimentales seleccionadas. El objetivo final del análisis, es la representación del conjunto de variables sobre la recta real, de tal forma que las variables que se encuentren situadas más próximas sobre la recta, sean aquellas que tengan menor coeficiente de desemejanza.

En general, el problema se formula en los siguientes términos. Se supone que se dispone de un conjunto finito de objetos: O . El objetivo es conseguir un orden lineal de los objetos del conjunto O , de tal forma que alguna desemejanza, D , definida entre los pares de objetos de O , tenga sus valores lo más próximos posibles a las distancias entre los puntos situados sobre la recta que representan dichos objetos, situación que determina el orden lineal. El carácter multiobjetivo de este problema procede de dos vertientes:

- (i) El que se pueda definir más de una desemejanza sobre el conjunto de objetos O , y
- (ii) El hecho de poder considerar tantas funciones objetivo como valores diferentes tenga la desemejanza D considerada.

Además de la introducción, el capítulo 4, contiene los siguientes apartados. En el segundo epígrafe, se formula matemáticamente el problema, y se presentan técnicas para su posible solución. En el tercer epígrafe, se formula el problema multiobjetivo, para una sola desemejanza, diseñando una técnica para su resolución. En el cuarto epígrafe, se formula el problema multiobjetivo, para más de una desemejanza, esbozando técnicas para su posible resolución. Finalmente, en el quinto epígrafe, se aplican los resultados previos a un problema concreto.

ÍNDICE

1. Planteamiento del problema. Metodologías para su resolución

- 1.1. Introducción
- 1.2. Estructuras de preferencia
 - 1.2.1. Propiedades de las relaciones binarias
 - 1.2.2. Distintas estructuras de preferencia
 - 1.2.2.1. Modelo tradicional de preferencia.
 - 1.2.2.2. Modelo con umbral de indiferencia
 - 1.2.2.3. Modelo con umbral de indiferencia variable
 - 1.2.2.4. Comparación de intervalos
 - 1.2.2.5. Modelo de dos umbrales
 - 1.2.2.6. Modelos que incluyen incomparabilidad
- 1.3. Formulación del problema multiobjetivo
- 1.4. Metodologías de resolución del PDM
 - 1.4.1. Estructuras de dominación por conos
 - 1.4.2. Óptimos de Pareto
 - 1.4.3. Soluciones satisfacientes
 - 1.4.4. Soluciones de compromiso
 - 1.4.5. Función de valor
 - 1.4.6. Estructuras de preferencia dinámicas
 - 1.4.6.1. Métodos interactivos
 - 1.4.6.2. Métodos out-ranking
- 1.5. Método del Simplex Multiobjetivo

2. Técnicas de solución.

- 2.1. Introducción
- 2.2. Técnica clásica
- 2.3. Técnicas Satisfacientes y Técnicas de Compromiso
 - 2.3.1. Técnicas Satisfacientes
 - 2.3.2. Técnicas de Compromiso
- 2.4. Conceptos relativos a las Técnicas Interactivas
 - 2.4.1. Punto ideal y distancias en la Programación Interactiva

2.4.2. Optimización en el sentido de Pareto

2.4.3. Distancia L_∞ Ponderada o de Tchebycheff Ponderada

2.4.4. Distancia del Valor Absoluto Ponderado

2.4.5. Equivalencia entre la Distancia L_1 ponderada y el Método de las Ponderaciones

2.5. Técnicas Interactivas

2.5.1. Técnica Interactiva por el Método de las Ponderaciones

2.5.2. Método de la Suma de Pesos de Steuer

2.5.3. Método de la Zionts – Wallenius (Z–W)

2.5.4. Algoritmo de Geoffrion-Dyer-Feinberg (GDF)

2.5.5. Técnica de la Distancia L_∞ Ponderada

2.5.6. Técnica STEM

2.5.7. Algoritmo de Steuer para la distancia L_∞ Ponderada

2.5.8. Algoritmo Interactivo por Metas (GOAL)

2.6. Técnicas especiales de Programación Multiatributo

2.6.1. Algoritmo General Interactivo 2.6.2. Algoritmo de Marcotte y Soland

2.7. Algoritmos basados en Técnicas de Ordenación (Out–Ranking)

2.7.1. Método Promethee

2.6.2. Método Electre

3. Aplicación de la Programación Multiobjetivo en Análisis Estadístico de Datos obtenidos por Diseños.

3.1. Introducción

3.2. Fundamentos y formulación de problemas multiobjetivo

3.3. Modelos Aleatorios Discretos

3.3.1. Modelo Binomial

3.4. Modelos Continuos Paramétricos

3.4.1. Estructuras de dominación por conos

3.5. Modelos No Paramétricos

3.6. Caso General

4. Aplicación de la Programación Multiobjetivo a la ordenación de objetos.

- 4.1. Introducción
- 4.2. Formulación del problema
- 4.3. Planteamiento y resolución del problema con una sola desemejanza
 - 4.3.1. Planteamiento del Problema
 - 4.3.2. Resolución del Problema
- 4.4. Análisis del Problema para más de una desemejanza
- 4.5. Aplicación a un Ejemplo

Resumen

REFERENCIAS

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA METODOLOGÍAS PARA SU RESOLUCIÓN

1.1. Introducción

La mayoría de los problemas de decisión que afectan a los seres humanos, se resuelven de forma bastante rutinaria, sin necesitar análisis sofisticados; pero en importantes ocasiones algunas personas se enfrentan a problemas complejos y trascendentes cuya resolución requiere de gran conocimiento y análisis profundo. Se pueden citar muchos ejemplos de estos problemas. La elección de un puesto de trabajo por un recién graduado. La compra de un bien de gran valor. La elección de la localización para la construcción de un nuevo hospital. La construcción de puentes o carreteras. En la resolución de estos problemas complejos, es necesario tener en cuenta varios objetivos y, por tanto, reciben el nombre de problemas de decisión multiobjetivo.

En todo problema de decisión, se plantea la necesidad de elegir entre distintos objetos (o acciones). Se denota por O , el conjunto de objetos entre los que se debe seleccionar alguno.

Suele ser difícil comparar directamente los objetos, debido a su complejidad. Por ello, los objetos se caracterizan mediante una serie de variables, o características relevantes, que se miden sobre ellos. El conjunto de resultados obtenidos al medir las variables, $V = (V_i)_{i \in I}$, sobre los objetos, se suele denotar por X , y se denomina espacio de alternativas o características de los objetos:

$$X = \{x = V(o) | o \in O\}.$$

Cuando este espacio es complejo, el decisor necesita realizar una simplificación adicional para analizar el problema, por lo que tiene que considerar una serie de funciones, definidas sobre el espacio de alternativas, que se denominan los objetivos. Los objetivos, denotado por $f = (f_1, \dots, f_n)$, transforman el espacio de alternativas X , en el espacio de resultados Y .

Por ejemplo, si una fábrica quiere producir determinada clase de azulejos, hay que tener en cuenta varios factores en su fabricación como componente de arcilla, componente de piedra, tipo de horno, tipo de pintura etc. Dependiendo de estos factores, se obtienen distintas respuestas, como son el grado de rugosidad, el grado de dureza, etc. La finalidad del problema es encontrar los valores de los factores que optimicen las respuestas.

Para elegir el mejor objeto, es necesaria la comparación entre ellos, bien directamente, o bien a través de sus características o de sus resultados. Dichas comparaciones, dan lugar a determinada clase de ordenación entre los objetos, que es lo

que se denomina estructura de preferencia. Al estudio de las estructuras de preferencia, se dedica el siguiente epígrafe.

1.2. Estructuras de preferencia

De los problemas prácticos expuestos en la introducción, se infiere que el grado de complejidad que conlleva la elección del mejor objeto, es muy diferente según sea el caso práctico concreto. Debido a ello, en el planteamiento general del problema se tienen en cuenta los tres conjuntos ya mencionados: (i) el espacio de objetos O , (ii) el espacio de alternativas X , y (iii) el espacio de resultados Y ; con los cuales se facilita el proceso de elección del mejor objeto.

Cuando el grado de complejidad es pequeño, el decisor puede llegar a comparar globalmente entre sí todos los objetos y, como consecuencia de dicha comparación, resolver el problema de elección del mejor objeto. Esta situación se produce cuando el cardinal del conjunto de objetos es pequeño. A medida que dicho cardinal aumenta, la selección del mejor objeto se vuelve más difícil e intrincada, pues en la práctica resulta imposible la tarea de comparar entre sí los objetos de forma global. La limitación humana conlleva el que sea posible comparar entre sí de forma global un número muy limitado de objetos, tal vez 4, 5 o 6.

Hay otro hecho, que limita notablemente la posibilidad de comparación, que es la explosión combinatoria. Por ejemplo, si se tiene que elegir el mejor objeto de entre 20, y la comparación global entre objetos se limita a seis objetos, el número de grupos distintos de seis objetos que se pueden formar es de 38760; lo que hace inviable la comparación de objetos de seis en seis. Esta complejidad obliga, en general, a fijar metas más simples. Lo usual, es limitarse a la comparación de objetos por pares; sin olvidar que, ante cada problema particular, además de las comparaciones de objetos por pares, se puede disponer de datos valiosos relativos al problema particular.

El conjunto de resultados que se obtienen al comparar los objetos por pares, es lo que se denomina estructura de preferencia del decisor. A continuación se define con precisión el significado de estructura de preferencia y se introduce la notación necesaria.

Las preferencias se pueden definir sobre el conjunto O , sobre el espacio X , o sobre el espacio Y . Se debe considerar el conjunto más simple al que se haya podido reducir el problema. No obstante, para unificar la presentación, y sólo por ello, en este capítulo, se utilizará para el estudio de las estructuras de preferencia, de forma figurada, el conjunto de objetos O .

Como se ha indicado, la estructura de preferencia surge de la comparación de los objetos por pares. Cuando el decisor se enfrenta con el problema de comparar dos objetos o_1 y o_2 , puede optar por una de las tres alternativas siguientes:

- (1) Preferencia del objeto o_1 sobre el objeto o_2 . Se indica por o_1Po_2 .
- (2) Igualdad respecto de la bondad de los dos objetos. Se indica por o_1Io_2 .
- (3) Imposibilidad de decidir cuál de los dos objetos es mejor. Se indica por o_1Jo_2 .

Sean

$$P(O) = \{(o_1, o_2) \in O \times O \mid o_1 P o_2\}$$

$$I(O) = \{(o_1, o_2) \in O \times O \mid o_1 I o_2\}$$

$$J(O) = \{(o_1, o_2) \in O \times O \mid o_1 J o_2\}$$

Cada uno de los conjuntos $P(O)$, $I(O)$ y $J(O)$ es un subconjunto de $O \times O$, y por tanto una relación binaria sobre el conjunto de objetos O . Una relación binaria sobre el conjunto O , es un subconjunto $R(O) \subseteq O \times O$.

Una relación binaria $R_c(O)$, se dice *complementaria* de la relación binaria $R(O)$, si y sólo si,

$$R_c(O) = \{(o_2, o_1) \in O \times O \mid (o_1, o_2) \in R(O)\}$$

Claramente se verifica:

$$P(O) \cup P_c(O) \cup I(O) \cup J(O) = O \times O$$

es decir, con cada par de objetos es deseable que el decisor sea capaz de decidir si le son indiferentes, si no los sabe comparar, o cual de los dos objetos es mejor para él.

Definición 1.2.1. Una familia $\{R_j(O)\}_{j \in J}$ de relaciones binarias, es una partición de $O \times O$, cuando la unión de todos los elementos de la familia es igual a $O \times O$, y las relaciones binarias son disjuntas dos a dos.

Una familia de relaciones binarias $\{R_j(O)\}_{j \in J}$, es un recubrimiento de $O \times O$, cuando la unión de todos los elementos de la familia es igual a $O \times O$, y pueden existir dos relaciones binarias en la familia que no sean disjuntas.

Definición 1.2.2. Una relación binaria $RB_1(O)$, sobre el conjunto de objetos O , es una subrelación binaria de la relación binaria $RB(O)$, si y sólo si, para todo $(o_1, o_2) \in RB_1(O)$, se verifica que $(o_1, o_2) \in RB(O)$ y, para todo $(o_3, o_4) \notin RB(O)$, se verifica que $(o_3, o_4) \notin RB_1(O)$.

1.2.1. Propiedades de las relaciones binarias

Reflexiva: Una relación binaria $R(O)$, definida sobre O , es reflexiva, si y sólo si, se verifica que $(o, o) \in R(O)$, para todo $o \in O$.

Simétrica: Una relación binaria $R(O)$, definida sobre O , es simétrica, si y sólo si, verifica que, si $(o_1, o_2) \in R(O)$, entonces $(o_2, o_1) \in R(O)$.

Antisimétrica: Una relación binaria $R(O)$, definida sobre O , es antisimétrica, si y sólo si, verifica que, si $(o_1, o_2) \in R(O)$ y $(o_2, o_1) \in R(O)$, entonces $o_1 = o_2$.

Asimétrica: Una relación binaria $R(O)$, definida sobre O , es asimétrica, si y sólo si, verifica que, si $(o_1, o_2) \in R(O)$, entonces $(o_2, o_1) \notin R(O)$.

Transitiva: Una relación binaria $R(O)$, definida sobre O , es transitiva, si y sólo si, verifica que, si $(o_1, o_2) \in R(O)$ y $(o_2, o_3) \in R(O)$, entonces $(o_1, o_3) \in R(O)$.

Completa: Una relación binaria $R(O)$, definida sobre O , es completa, si y sólo si, para todo $(o_1, o_2) \in O \times O$, con $o_1 \neq o_2$, se verifica $(o_1, o_2) \in R(O)$ o $(o_2, o_1) \in R(O)$.

De Ferrers: Una relación binaria $R(O)$, definida sobre O , es de Ferrer, si y sólo si, verifica que, si $(o_1, o_2) \in R(O)$ y $(o_3, o_4) \in R(O)$, entonces $(o_1, o_4) \in R(O)$ y $(o_3, o_2) \in R(O)$.

Semitransitiva: Una relación binaria $R(O)$, definida sobre O , es semitransitiva, si y sólo si, para todo $o \in O$, se verifica que, si $(o_1, o_2) \in R(O)$ y $(o_2, o_3) \in R(O)$, entonces $(o_1, o) \in R(O)$ o $(o, o_3) \in R(O)$.

Se especifica a continuación, en la siguiente tabla, la terminología utilizada en el presente trabajo, así como otros nombres utilizados en otras publicaciones.

Nombre en este trabajo	Otros nombres	Propiedades
Cuasi-orden orden débil	Preorden	Reflexiva y transitiva
Orden	Preorden completo Cuasiorden completo Orden débil	Reflexiva, transitiva y completa
Orden parcial	Orden	Reflexiva, transitiva y antisimétrica
Cadena	Orden lineal Orden completo Orden simple	Reflexiva, transitiva, completa y antisimétrica
Orden parcial estricto		Transitiva y asimétrica
Orden fuerte	Orden Orden estricto Orden completo estricto	Transitiva, asimétrica y completa
Equivalencia		Reflexiva, simétrica y transitiva

Tabla 1

Sea $S = P \cup I$, siendo P la relación de preferencia e I la relación de indiferencia.

Definición 1.2.3. Un objeto $o \in O$, es un elemento maximal de O , con respecto a la relación binaria S , si y sólo si, no existe $\bar{o} \in O$ tal que $(\bar{o}, o) \in S$. El conjunto de elementos maximales de O respecto de S , se denota por $M(O, S)$.

Definición 1.2.4. Un objeto $o \in O$, es un mejor objeto de O , con respecto a la relación binaria S , si y sólo si, para todo $\bar{o} \in O$, se verifica $(o, \bar{o}) \in S$. El conjunto de mejores objetos de O respecto de S , se denota por $CE(O, S)$. (Tanto $M(O, S)$, como $CE(O, S)$ pueden ser el conjunto vacío.)

Con las tres relaciones binarias P, I y J , se obtiene la estructura de preferencia más natural para el decisor. La partición del conjunto $O \times O$, se logra añadiendo a las tres relaciones anteriores, la relación P_c .

Definición 1.2.5. $EP(O) = \{P, P_c, I, J\}$ es una estructura de preferencia sobre $O \times O$, si es una partición del conjunto $O \times O$, verificándose que P es asimétrica e irreflexiva, I es reflexiva y simétrica y J es irreflexiva y simétrica.

Toda estructura de preferencia se puede caracterizar por la relación binaria Q , donde $Q = P \cup I$, es decir,

$$o_1 Q o_2 \Leftrightarrow o_1 P o_2 \text{ o } o_1 I o_2$$

Dado S , se verifica:

$$o_1 P o_2 \Leftrightarrow o_1 Q o_2 \text{ y no se verifica } o_2 Q o_1$$

$$o_1 I o_2 \Leftrightarrow o_1 Q o_2 \text{ y } o_2 Q o_1$$

$$o_1 J o_2 \Leftrightarrow \text{no se verifica } o_1 Q o_2 \text{ y no se verifica } o_2 Q o_1$$

La relación Q , se suele denominar de preferencia, diferenciándola de P que se suele denominar preferencia estricta.

1.2.2. Distintas estructuras de preferencia

1.2.2.1. Modelo tradicional de preferencia.

El modelo tradicional de preferencia se caracteriza por una función $g : O \rightarrow R$, donde R representa el conjunto de los números reales. En este caso

$$(o_1, o_2) \in P \Leftrightarrow g(o_1) > g(o_2)$$

$$(o_1, o_2) \in I \Leftrightarrow g(o_1) = g(o_2)$$

y la relación de incomparabilidad J es el conjunto vacío.

La relación $Q = P \cup I$, es completa, reflexiva y transitiva, y por tanto, es un *orden*. (En el libro de Vincke, se denomina preorden completo.)

1.2.2.2. Modelo con umbral de indiferencia

La transitividad de la indiferencia incluida en el modelo tradicional, es incompatible con la existencia de un umbral de sensibilidad bajo el cual, o bien no se distingue la diferencia entre dos objetos, o se rehúsa declarar la preferencia de uno sobre el otro. Este hecho ya fue destacado por Poincaré, y antes de él, por los filósofos griegos. Fue P. Luce el primero que precisó este hecho fundamental, en el marco de los modelos de preferencia, ilustrándole con el siguiente ejemplo. Si T_i representa una taza de té conteniendo i mg. de azúcar, es claro que no se puede distinguir entre T_i y T_{i+1} , aunque en general, se podrá distinguir entre una taza de té que no tiene azúcar, y otra que tiene un poco de azúcar.

Para definir este modelo, es necesario disponer, como en el anterior, de una función $g : O \rightarrow R$, donde R representa el conjunto de los números reales y, además, se introduce un umbral positivo q . En este caso

$$(o_1, o_2) \in P \Leftrightarrow g(o_1) > g(o_2) + q$$
$$(o_1, o_2) \in I \Leftrightarrow |g(o_1) - g(o_2)| \leq q$$

y la relación de incomparabilidad J es el conjunto vacío.

La relación Q de este modelo, es de Ferrers, completa y semi-transitiva.

La estructura de preferencia representada por un modelo con umbral de indiferencia, se denomina una estructura de *semiorden*. En un semiorden, la relación binaria P es transitiva.

La estructura de semiorden se puede transformar en un orden, definiendo P' e I' de la siguiente forma:

$$(o_1, o_2) \in P' \Leftrightarrow g(o_1) > g(o_2)$$
$$(o_1, o_2) \in I' \Leftrightarrow g(o_1) = g(o_2)$$

1.2.2.3. Modelo con umbral de indiferencia variable

Una desventaja del modelo con umbral de indiferencia, es la exigencia de que el umbral sea constante. Muchas aplicaciones, incluyen variaciones del umbral de indiferencia, a lo largo de la escala elegida (una variación de 1000 dólares no significa lo mismo cuando se trata con miles de dólares o con millones de dólares). Suele ser útil, en muchos problemas prácticos el permitir variaciones del umbral de indiferencia.

Para definir este modelo es necesario disponer de dos funciones g y q , $g : O \rightarrow R$ y $q : O \rightarrow R^+$, donde R representa el conjunto de los números reales. En este caso,

$$(o_1, o_2) \in P \Leftrightarrow g(o_1) > g(o_2) + q(g(o_2))$$
$$(o_1, o_2) \in I \Leftrightarrow (g(o_1) - g(o_2)) \leq q(g(o_2)) \text{ y } (g(o_2) - g(o_1)) \leq q(g(o_1))$$

Siendo la relación de incomparabilidad J el conjunto vacío.

Se suele exigir que la función umbral sea consistente, es decir, verifique:

$$\text{Si } g(o_1) > g(o_2), \text{ entonces } g(o_1) + q(g(o_1)) \geq g(o_2) + q(g(o_2))$$

Aunque puede haber modelos que no verifiquen esta condición. Un modelo simple de este caso, se obtiene cuando se considera $q(g(o_1)) = \alpha g(o_1)$, con $\alpha > 0$.

La estructura de preferencia representada por el modelo de umbral variable se denomina estructura de preferencia de *orden de intervalo*. Las estructuras de preferencia de orden de intervalo verifican las siguientes propiedades:

(i) La relación P es transitiva.

(ii) Con cualquier estructura de orden de intervalo se puede asociar dos estructuras de orden, definidas por:

$$(o_1, o_2) \in P' \Leftrightarrow g(o_1) > g(o_2)$$

$$(o_1, o_2) \in I' \Leftrightarrow g(o_1) = g(o_2)$$

y

$$(o_1, o_2) \in P'' \Leftrightarrow g(o_1) + q(g(o_1)) > g(o_2) + q(g(o_2))$$

$$(o_1, o_2) \in I'' \Leftrightarrow g(o_1) + q(g(o_1)) = g(o_2) + q(g(o_2))$$

Estos ordenes están relacionados con el orden que se obtiene al asociar cada objeto con el número de objetos que le son preferidos, y con el número de objetos que son peores que el objeto considerado.

1.2.2.4. Comparación de intervalos

La imprecisión de los instrumentos de medida, especialmente en problemas de decisión, y la complejidad de las decisiones que deben considerarse, para la comparación de cada par de objetos, hacen que con frecuencia sea difícil evaluar un criterio, siguiendo determinado punto de vista, mediante números precisos. En algunos casos, conviene evaluar cada objeto por un intervalo $[a(o), b(o)]$. Para la comparación de estos intervalos se han estudiado, fundamentalmente, dos tipos de técnicas.

(i) Se define:

$$o_1 P o_2 \Leftrightarrow [a(o_1), b(o_1)] \cap [a(o_2), b(o_2)] = \emptyset \text{ y } a(o_1) > b(o_2)$$

$$o_1 I o_2 \Leftrightarrow [a(o_1), b(o_1)] \cap [a(o_2), b(o_2)] \neq \emptyset$$

Esta estructura de preferencia, se identifica con un orden de intervalo, definiendo

$$a(o) = g(o) \text{ e } b(o) = g(o) + q(g(o))$$

Con esta definición, el modelo se convierte en un modelo de umbral variable. En la situación particular, donde todos los intervalos tienen igual longitud, la estructura de orden de intervalo es la de un semiorden.

(ii) Se define:

$$o_1 P o_2 \Leftrightarrow a(o_1) > a(o_2) \text{ y } b(o_1) > b(o_2)$$

$$o_1 I o_2 \Leftrightarrow [a(o_1), b(o_1)] \subseteq [a(o_2), b(o_2)] \text{ o } [a(o_2), b(o_2)] \subseteq [a(o_1), b(o_1)]$$

En este caso, P es una relación de orden parcial de dimensión dos, e I es la relación complementaria. Un orden parcial de dimensión dos es, por definición, una relación transitiva que puede obtenerse como la intersección de dos órdenes fuertes.

1.2.2.5. Modelo de dos umbrales

La aplicación práctica del modelo de umbral variable, implica una fase de estimación del umbral de indiferencia. Parece poco realista la imposición de un valor preciso, por encima del cual la preferencia sea estricta, y por debajo del cual se considere indiferencia. Con frecuencia, en las aplicaciones de la vida real, sucede que hay una zona intermedia en el interior de la cual el decisor duda cuando tiene que valorar dos objetos, o puede dar respuestas contradictorias cuando se cambia la forma de proponer las cuestiones. Estas observaciones, motivan la introducción de un modelo de preferencia en el que se incluye dos umbrales diferentes: un umbral de indiferencia, por debajo del cual el decisor considera indiferencia entre los dos objetos y un umbral de preferencia que es necesario alcanzar para que el decisor considere la preferencia estricta:

$$o_1 P o_2 \Leftrightarrow g(o_1) > g(o_2) + p(g(o_2))$$

$$o_1 \bar{P} o_2 \Leftrightarrow g(o_2) + p(g(o_2)) \geq g(o_1) > g(o_2) + q(g(o_2))$$

$$o_1 I o_2 \Leftrightarrow g(o_2) + q(g(o_2)) \geq g(o_1) \text{ y } g(o_1) + q(g(o_1)) \geq g(o_2)$$

Roy dio el nombre de *preferencia débil* a la relación \bar{P} , que refleja las dudas del decisor entre la indiferencia y la preferencia, pero que no es una preferencia menos fuerte como este nombre puede inducir a creer.

La estructura de doble umbral se llama una estructura de *pseudo orden*, cuando se verifica la condición:

$$g(o_1) > g(o_2) \Leftrightarrow g(o_1) + q(g(o_1)) > g(o_2) + q(g(o_2))$$

$$\Leftrightarrow g(o_1) + p(g(o_1)) > g(o_2) + p(g(o_2))$$

Se observa que una estructura con triple relación P, \bar{P}, I , es muy natural, cuando al comparar intervalos, se concluye:

$$o_1 P o_2 \Leftrightarrow a(o_1) > b(o_2)$$

$$o_1 \bar{P} o_2 \Leftrightarrow b(o_1) > b(o_2) > a(o_1) > a(o_2)$$

$$o_1 I o_2 \Leftrightarrow [a(o_1), b(o_1)] \subseteq [a(o_2), b(o_2)] \text{ o } [a(o_2), b(o_2)] \subseteq [a(o_1), b(o_1)]$$

1.2.2.6. Modelos que incluyen incomparabilidad

En todos los modelos anteriores, se considera $J=\emptyset$. Sin embargo, esta hipótesis no suele ser muy realista, pues en la práctica, como consecuencia de la falta de datos, en determinadas ocasiones no se pueden comparar dos objetos.

La incomparabilidad se suele presentar cuando se necesita agregar, al proceso de toma de decisiones, opiniones contradictorias. En este caso, suele ser poco útil forzar al decisor a comparar los objetos.

Se ha desarrollado poca investigación sobre modelos que permiten la incomparabilidad. Los modelos que a continuación se presentan son los de *orden parcial*, *cuasi orden* y *semiorden* y *orden de intervalos parciales*. A estos modelos se debe añadir la relación *outranking*, asociada más específicamente con los problemas multicriterio.

(1) Estructura de orden parcial

Una estructura de orden parcial, se caracteriza por ser la relación de preferencia transitiva, y dos objetos distintos no pueden ser indiferentes. Esto implica la existencia de una función unívoca $g: O \rightarrow R^q$, tal que se verifique: $o_1 P o_2 \Leftrightarrow g(o_1) > g(o_2)$. Se diferencia del orden completo, en que pueden existir dos objetos que sean incomparables. $I = \emptyset$ y la relación $Q = P \cup I$ asociada, es un orden parcial.

(2) Estructura de cuasi orden

Se la llama también orden débil. Se caracteriza porque tanto la relación de preferencia como la de indiferencia son transitivas. Además la relación es antisimétrica. Esto implica la existencia de una función $g: O \rightarrow R^q$, tal que se verifique: $o_1 P o_2 \Leftrightarrow g(o_1) > g(o_2)$ y $o_1 I o_2 \Leftrightarrow g(o_1) = g(o_2)$. La relación $Q = P \cup I$ asociada, es reflexiva, transitiva y antisimétrica, es decir, un cuasi orden.

(3) Estructura de semiorden y de orden de intervalos parciales

Las estructuras definidas anteriormente son incompatibles con la existencia de un umbral de indiferencia. Es natural, por tanto, intentar definir estructuras que permitan contemplar simultáneamente incomparabilidades e intransitividades de las indiferencias, que se llamarán semiorden parcial, cuando se trata de un umbral constante, y orden de intervalo parcial, cuando el umbral es variable.

Cuando se pregunta a alguna persona sobre la comparación de objetos (decisiones, acciones, candidatos,...) por pares, en términos de las tres opciones fundamentales (preferencia de uno de ellos, indiferencia entre ellos y negativa o incapacidad de compararlos), no es necesario obtener una de las estructuras de preferencia descritas en este capítulo. Lo que se debe hacer es buscar las mínimas modificaciones para obtener las propiedades deseadas. El problema es pues, adaptar cualquier estructura de preferencia con la ayuda de una estructura específica, o hallar la estructura de preferencia específica a distancia mínima de una estructura dada.

1.3. Formulación del problema multiobjetivo

Un problema multiobjetivo se formula mediante los siguientes elementos:

- i) Un conjunto de objetos O , entre los cuales el decisor debe elegir su mejor objeto.
- ii) Un conjunto finito de variables $V = (V_i)_{i \in I}$, que se definen sobre O .
- iii) El espacio de alternativas o características de los objetos:

$$X = \{x = V(o) | o \in O\}.$$

- iv) Un conjunto de objetivos $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_j: X \rightarrow R$, $j = 1, \dots, n$, que se definen sobre los elementos del conjunto X .
- v) El espacio de resultados Y :

$$Y = \{y = f(x) | x \in X\}.$$

El espacio de alternativas X , sólo es necesario cuando el decisor no sabe proporcionar una estructura de preferencia sobre el conjunto de objetos O . Del mismo modo, el conjunto de resultados Y , sólo es necesario cuando el decisor no sabe proporcionar una estructura de preferencia sobre el espacio de atributos X .

- vi) Además, se necesita la estructura de preferencia del decisor EP , definida bien sobre O , X o Y .

Por tanto, el máximo número de elementos que son necesarios para plantear un problema de decisión multiobjetivo, PDM , son $\{O, V, X, f, Y, EP\}$. Dependiendo de la complejidad del conjunto de objetos O , puede suceder que, para plantear algunos problemas de decisión multiobjetivo, se necesiten menos elementos.

El conjunto X puede ser estable o evolutivo, dependiendo de si puede ser modificado o no, a lo largo del proceso de toma de decisiones.

1.4. Metodologías de resolución del PDM

Resolver el problema de decisión multiobjetivo, consiste en hallar un subconjunto de objetos S de O , tales que cualquiera de los elementos de S pueda considerarse como mejor objeto para el decisor.

Entre las distintas formas de proceder para resolver el problema de decisión multiobjetivo, se pueden distinguir las siguientes:

- i) Procedimientos que seleccionan un único objeto de O como la solución del problema.
- ii) Procedimientos que determinan un orden estricto sobre los elementos de O , que se ordenan de peor a mejor o viceversa.
- iii) Procedimientos que en sucesivas etapas van seleccionando de forma progresiva un subconjunto de objetos que está estrictamente contenido en el subconjunto seleccionado en la etapa precedente, hasta que el decisor decide finalizar.

- iv) Procedimientos que determinan una partición del conjunto de objetos y posteriormente ordenan los subconjuntos de la partición.
- v) Procedimientos que determinan un recubrimiento del conjunto de objetos y posteriormente ordenan los subconjuntos del recubrimiento.

Dado un problema de programación multiobjetivo $\{O, V, X, f, Y, EP\}$, la estructura de preferencia del decisor, EP , que se construye sobre el espacio de objetivos Y , sirve para ordenar parcialmente los objetos, aunque esta ordenación no suele ser suficiente para resolver el problema multiobjetivo. Ello obliga, a hacer refinamientos de los órdenes parciales, hasta que se halla la solución del problema. Se dedica este epígrafe a exponer distintas metodologías para realizar estos refinamientos.

La estructura de preferencia, EP , se parte en tres relaciones binarias $EP = P \cup I \cup J$, donde P es la relación binaria de preferencia estricta, I es la relación binaria de indiferencia y J es la relación binaria de incomparabilidad.

Se dice que el resultado y_1 *es mejor que* y_2 , para la preferencia P , cuando $(y_1, y_2) \in P$. También se dice que y_2 *es dominado por* y_1 ; o que y_1 *es preferido a* y_2 .

Un resultado y_2 se denomina **no dominado o eficiente**, cuando no existe un resultado y_1 tal que $(y_1, y_2) \in P$; es decir, cuando y_2 no está dominado por ningún otro resultado. El conjunto de resultados eficientes, o no dominados, se denota por N .

Un resultado y_2 **es dominado**, cuando existe un resultado y_1 , tal que $(y_1, y_2) \in P$; es decir, cuando existe al menos un resultado y_1 , tal que y_1 domina a y_2 . El conjunto de resultados dominados, se denota por D . Es claro que $D = Y \setminus N$.

Una estructura de preferencia $EP_1 = (P_1, I_1, J_1)$, *es un refinamiento* de EP , cuando el conjunto de elementos no dominados N_1 en EP_1 es tal que $N_1 \subset N$, siendo el contenido estricto.

Una forma rápida de refinar EP , es por el método clásico de utilizar una función de valor V , consistente con EP . En este caso, $N_1 = \{y_0 \mid V(y_0) \geq V(y), \forall y \in Y\}$, es decir, N_1 está formado por todos aquellos resultados que maximizan la función de valor.

Un método general para hallar la solución de un problema multiobjetivo, consiste en construir una sucesión de refinamientos $\{EP_k\}$, $k \in K$; de tal forma que, para todo k , EP_{k+1} sea un refinamiento estricto de EP_k . El proceso terminaría con un EP_k para el cual, su conjunto de resultados no dominados, N_k , fuera de tamaño suficientemente pequeño como para que el decisor pudiera hallar sin dificultad su solución preferida.

1.4.1. Estructuras de dominación por conos

Para aplicar esta metodología se necesita que, el espacio de resultados Y , sea un subconjunto de R^n . En algunos problemas de decisión multiobjetivo, Y no se conoce con precisión, lo que obliga a tomar como espacio de resultados Y_0 , un subconjunto abierto de R^n , que contiene al espacio de resultados Y ; sobre el que se construyen las

estructuras de preferencia. Suele ser conveniente considerar $Y_0 = R^n$. El conjunto Y_0 indica los resultados, alcanzables o no, en los que pueden estar interesados decisor y analista; o en los que pueden intercambiar sus conocimientos para precisar sus preferencias.

Para definir la dominación por conos, se necesita definir direcciones de preferencia. Estas direcciones se sintetizan en la definición 1-4-1-1. La preferencia se indica por $>$ y la indiferencia por \sim .

Definición 1.4.1.1. Dados $z \in Y_0 \subseteq R^n$ y $d \in R^n$, $d \neq 0$:

i) d es una *dirección dominada global* para $z \in Y_0$, si y sólo si,

$$\forall \alpha > 0 \text{ y } z + \alpha d \in Y_0, \text{ se verifica: } z > z + \alpha d$$

ii) d es una *dirección dominada local* en $z \in Y_0$, si y sólo si,

$$\exists \alpha_0 > 0, \text{ tal que, } \forall 0 < \alpha < \alpha_0 \text{ y } z + \alpha d \in Y_0, \text{ se verifica: } z > z + \alpha d$$

iii) d es una *dirección preferida global* en $z \in Y_0$, si y sólo si,

$$\forall \alpha > 0 \text{ y } z + \alpha d \in Y_0, \text{ se verifica: } z < z + \alpha d$$

iv) d es una *dirección preferida local* en $z \in Y_0$, si y sólo si,

$$\exists \alpha_0 > 0, \text{ tal que, } \forall 0 < \alpha < \alpha_0 \text{ y } z + \alpha d \in Y_0, \text{ se verifica: } z < z + \alpha d$$

v) d es una *dirección indiferente global* en $z \in Y_0$, si y sólo si,

$$\forall \alpha > 0 \text{ y } z + \alpha d \in Y_0, \text{ se verifica: } z \sim z + \alpha d$$

vi) d es una *dirección indiferente local* en $z \in Y_0$, si y sólo si,

$$\exists \alpha_0 > 0, \text{ tal que, } \forall 0 < \alpha < \alpha_0 \text{ y } z + \alpha d \in Y_0, \text{ se verifica: } z \sim z + \alpha d$$

vii) d es una *dirección tangente* en $z \in Y_0$, si y sólo si,

$$\exists y_k \text{ } 1 \leq k < \infty, \text{ tal que, } \forall k \text{ } y_k \in Y_0, \text{ y se verifica: } \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = z \text{ y } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k - z}{\|y_k - z\|} = \frac{d}{\|d\|}$$

viii) El cono *dominado global* en $z \in Y_0$, se define por

$$D(z) = \{d \in R^n \mid d \text{ es dirección dominada global en } z\}$$

ix) El cono *dominado local* en $z \in Y_0$, se define por

$$LD(z) = \{d \in R^n \mid d \text{ es dirección dominada local en } z\}$$

x) El cono *preferido global* en $z \in Y_0$, se define por

$$P(z) = \{d \in R^n \mid d \text{ es dirección preferida global en } z\}$$

xi) El cono *preferido local* en $z \in Y_0$, se define por

$$LP(z) = \{d \in R^n \mid d \text{ es dirección preferida local en } z\}$$

xii) El cono *indiferente global* en $z \in Y_0$, se define por

$$I(z) = \{d \in R^n \mid d \text{ es dirección indiferente global en } z\}$$

xiii) El cono *indiferente local* en $z \in Y_0$, se define por

$$LID(z) = \{d \in R^n \mid d \text{ es dirección indiferente local en } z\}$$

xiv) El cono *de las tangentes* en $z \in Y_0$, se define por

$$T(z) = \{d \in R^n \mid d \text{ es dirección tangente en } z\}.$$

Definición 1.4.1.2. Por *estructura de dominación general* en $z \in Y_0$, se entiende el conjunto:

$$ED(z) = \{D(z), LD(z), P(z), LP(z), I(z), LI(z), T(z <), T(z >), T(z \sim)\}.$$

La estructura de dominación general, es demasiado compleja para ser útil. Por ello, se utilizan, según convenga, $\{D(z), P(z), I(z)\}$ o $\{LD(z), LP(z), LI(z)\}$.

Cuando los conos D, P e I ; o LD, LP, LI , no dependen de z , se denominan conos o estructuras de dominación *constantes*. Se estudian, a continuación, estas estructuras.

Un conjunto, $A \subseteq R^n$, es un cono, si y sólo si, $\forall z \in A$ y $\forall \lambda > 0$, se verifica $\lambda z \in A$. Un *cono convexo*, A , es un cono que además es un conjunto convexo; es decir, si y sólo si, $\forall z, w \in A$ y $\forall \lambda, \beta > 0$, se verifica $\lambda z + \beta w \in A$. Un *cono poliédrico*, A , es un cono que además es un poliedro; es decir, si y sólo si, puede representarse en la forma

$$A = \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j d^j \mid \lambda_j \geq 0, \quad \lambda_j \in R \right\}$$

Para algún conjunto $\{d^j \mid j = 1, \dots, m\}$ denominado generador de A . Un cono poliédrico también puede representarse en la forma

$$A = \{d \in R^n \mid a^i d \leq 0, \quad i = 1, \dots, r\}$$

Se denota $A^+ = A \cup \{0\}$ y $A^- = A \setminus \{0\}$.

Un cono es *apuntado*, cuando y sólo cuando, $A^+ \cap (-A^+) = \{0\}$. Un cono apuntado no contiene subespacios, salvo el trivial.

Un cono A es *agudo*, si y sólo si, $Cl(A) \subset H \cup \{0\}$, siendo H un semiespacio abierto. A es agudo, si y sólo si, $Cl(A)$ es apuntado. ($Cl(A)$ denota la clausura de A .)

Teorema 1.4.1.1. Sea L el subespacio vectorial de dimensión máxima, contenido en $\Lambda \subset R^n$. Sea L^\perp el espacio ortogonal a L en R^n y $\Lambda^\perp = \Lambda \cap L^\perp$ la proyección ortogonal de Λ sobre L ; entonces $\Lambda = L + \Lambda^\perp$.

Definición 1.4.2.3. Sea $S \subset R^n$. Se llama *cono polar* de S a

$$S^* = \{ d \in \Lambda \subset R^n \mid dy \leq 0, \forall y \in S \}.$$

Lema 1.4.2.2. (i) Para cualquier S , su polar S^* es un cono convexo cerrado. Además, $S^* = (Cl(S))^*$. (ii) Si $S_1 \subset S_2$, entonces $S_2^* \subset S_1^*$. (iii) Sea Λ un cono convexo, entonces $(\Lambda^*)^* = Cl(\Lambda)$. Además, si Λ es cerrado, entonces $\Lambda = (\Lambda^*)^*$.

Teorema 1.4.1.3. (i) Sea $\Lambda = Conv[v^1, \dots, v^r]$ un cono convexo poliédrico, entonces $\Lambda^* = \{ d \in R^n \mid dv^j \leq 0, j = 1, \dots, r \}$. (ii). Sea Λ un cono convexo, entonces Λ^* es un cono poliédrico, si y sólo si, $Cl(\Lambda)$ es un cono poliédrico. ($Conv$ denota envoltura convexa.)

Teorema 1.4.1.4. Sea Λ un cono (no necesariamente convexo) de R^n .

(i) $Int(\Lambda^*) \neq \emptyset$, si y sólo si, Λ es agudo.

(ii) Cuando Λ es agudo, $Int(\Lambda^*) = \{ d \in R^n \mid dy < 0, \forall y \in CL(\Lambda), y \neq 0 \}$.

Sea Λ un cono tal que $0 \in \Lambda$ y sea $N(Y/\Lambda)$ el conjunto de los puntos no dominados de Y respecto de Λ .

Lema 1.4.1.-5. (i) Si $\Lambda \setminus \{0\} \neq \emptyset$, entonces $N(Y/\Lambda) \subset \partial Y$ (la frontera de Y), que es vacío, si Y es abierto.

(ii) $N(Y/\Lambda) = \emptyset$, si $\Lambda = R^n$, y $N(Y/\Lambda) = Y$, si $\Lambda = \{0\}$.

(iii) $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \Rightarrow N(Y/\Lambda_2) \subset N(Y/\Lambda_1)$.

(iv) $N(Y + \Lambda/\Lambda) \subset N(Y/\Lambda)$.

(v) Si Λ es apuntado, entonces $N(Y + \Lambda/\Lambda) = N(Y/\Lambda)$.

Como consecuencia, si Λ crece, aumentan las direcciones preferidas y dominadas, y disminuyen las indiferentes, así como los N -puntos. Por tanto, $N(Y/Cl(\Lambda)) \subset N(Y/\Lambda)$.

Teorema 1.4.1.6. Una condición necesaria y suficiente para que $y \in N(Y/\Lambda)$, es que se verifiquen (i) $Y \cap (y + L) = \{y\}$, y (ii) $y^\perp \in N(Y^\perp/\Lambda^\perp)$, donde L es el máximo espacio lineal contenido en Λ , e $y^\perp, Y^\perp, \Lambda^\perp$ son las proyecciones de y, Y, Λ en L^\perp , respectivamente.

Corolario 1.4.1.7. Se supone que $\Lambda^\perp \neq \{0\}$, es decir, Λ no es un subespacio lineal. Entonces $z \in N(Y/\Lambda)$ implica que $z \in \partial(Y + \Lambda)$.

Corolario 1.4.1.8. Si $\Lambda^\perp \neq \{0\}$, e $Y + \Lambda = R^n$, entonces $N(Y/\Lambda) = \emptyset$.

Si $A^\perp = \{0\}$, entonces A es un subespacio vectorial. Para todo $d \in (A \setminus \{0\})$, d y $-d$, son direcciones dominadas y preferidas, y por tanto $N(Y/A) = \emptyset$. Este es un caso patológico; por ello, sólo se trabaja en aquellos casos en que $A^\perp \neq \{0\}$.

Lema 1.4.1.9.

- (i) Si z maximiza λ y en Y , para algún $\lambda \in \text{Int}(A^*)$, entonces $z \in N(Y/A)$.
- (ii) Si z es el único máximo de λ y en Y , para algún $\lambda \in A^* \setminus \{0\}$, entonces $z \in N(Y/A)$.
- (iii) Si z maximiza λ y en Y , para algún $\lambda \in A^* \setminus \{0\}$ y A es abierto, entonces $z \in N(Y/A)$.

Se supone que A es un cono agudo poliédrico tal que $A^* = \text{Conv}[d^1, \dots, d^r]$. Sea H una matriz, de dimensión $r \times n$, tal que d^k es la k -ésima fila de H , $k = 1, \dots, r$. Sea $Z = \{z = Hy \mid y \in Y\}$. Es claro que si $d \in (A \setminus \{0\})$, entonces $Hd \leq 0$. Además, por ser A agudo, es $\dim(A^*) = n$.

Teorema 1.4.1.10.

$$y \in N(Y/A) \Leftrightarrow z = Hy \in N(Y/A^\leq), \text{ (donde } A^\leq = \{d \in R^r \mid d \leq 0\}).$$

OBSERVACIÓN: Los N -puntos de Y , se calculan en función de los N -puntos de Z , que son óptimos en el sentido de Pareto, cuando A es un cono poliédrico.

Definición 1.4.1.4. Se dice que Y es A convexo, si y sólo si, $Y + A$ es convexo.

Teorema 1.4.1.11. Si $A_1 \subset A_2$, son conos convexos e Y es A_1 -convexo, entonces Y es también A_2 -convexo.

NOTA: Si Y es A -convexo, entonces Y también es $Cl(A)$ -convexo. El recíproco no es cierto. Considerando $A = (A^\leq)$, si Y es A -convexo, no implica que sea $(\text{Int}(A) \cup \{0\})$ -convexo. Es claro que si Y es convexo, entonces también son convexos $Cl(Y)$ e $\text{IntRelativo}(Y)$.

1.4.2. Óptimos de Pareto

Sea (X, f, Y) la terna tomada de la modelización de un programa multiobjetivo, formada por las alternativas X , los objetivos f y el espacio de resultados Y .

Sobre esta terna se estudia conceptualmente la estructura de preferencia de Pareto, así como la forma de caracterizar y hallar las soluciones no dominadas o eficientes, tanto en el espacio de resultados Y , como en el espacio de alternativas X .

La estructura de preferencia de Pareto, supone que *más es mejor* en cada uno de los objetivos $f = (f_1, \dots, f_n)$. Además, en la filosofía de Pareto, no se suele disponer de otra información adicional relevante sobre las preferencias, o sobre cómo se

intercambian las preferencias entre los objetivos. Ya se explicó, en el apartado 1-4-1, que cualquier estructura de dominación definida por un cono poliédrico, se puede transformar en una estructura de dominación de Pareto, por una transformación lineal adecuada del espacio de resultados.

En el espacio de resultados $Y = \{y = f(x) | x \in X\}$, la preferencia en el sentido de Pareto, se define como:

$$y^1 \succ y^2, \text{ si y sólo si, se verifica: } y^1 \geq y^2$$

es decir, todas las componentes de y_1 son mayores o iguales que todas las componentes de y_2 , y al menos una componente es mayor.

Se recuerda que $\{\succ\}$ es transitiva, aunque $\{\sim\}$ no lo es; como consecuencia $\{\succ\}$ no es un orden débil. Los conos que intervienen en las preferencias de Pareto se definen por las fórmulas siguientes:

$$A^< = \{d \in R^n \mid d_i < 0, i = 1, \dots, n\}, \quad A^> = \{d \in R^n \mid d_i > 0, i = 1, \dots, n\},$$

$$A^{\leq} = \{d \in R^n \mid d_i \leq 0, i = 1, \dots, n, \text{ y } \exists j \text{ tal que } d_j < 0\},$$

$$A^{\geq} = \{d \in R^n \mid d_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \text{ y } \exists j \text{ tal que } d_j > 0\},$$

$$A^{\leq} = \{d \in R^n \mid d_i \leq 0, i = 1, \dots, n\}, \quad A^{\geq} = \{d \in R^n \mid d_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Con la notación previa,

$$y^1 \succ y^2 \Leftrightarrow y^2 \in y^1 + A^{\leq} \text{ o } y^2 - y^1 \in A^{\leq}.$$

Además,

$$\{y \succ\} = Y \cap (y + A^{\leq}) \quad \text{y} \quad \{\succ y\} = Y \cap (y + A^{\geq}).$$

El conjunto A^{\geq} se llama *cono preferido* y A^{\leq} se llama *cono dominado*.

Los resultados que son óptimos de Pareto, se denominan N -puntos, eficientes, no dominados o admisibles. Es claro que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) $y^0 \in Y$ es un N -punto,
- ii) $\{y^0 <\} = \emptyset$,
- iii) No existe $y \in Y$ tal que $y \geq y^0$,
- iv) Para cada $y \in Y$, si $y \geq y^0$, entonces $y = y^0$.

OBSERVACIÓN: Si Y es abierto, entonces $N = \emptyset$. En otros casos, Y no es N -acotado. En todo caso, se denota por $N(Y) = N(Y/P)$ el conjunto de *óptimos de Pareto*.

1.4.3. Soluciones satisficientes

Las personas necesitan conseguir y mantener, consciente o inconscientemente, unas metas para alcanzar su equilibrio. Entre ellas se pueden citar:

- (i) Supervivencia: salud, seguridad, equilibrio psicológico, etc.
- (ii) Perpetuación de la especie: amor familiar, bienestar, sexo, procreación de la siguiente generación, etc.
- (iii) Sentimientos de auto importancia: autoestima, reconocimiento, prestigio, dominio, poder, etc.
- (iv) Aprobación social: estima y respeto por parte de los demás, dar y aceptar simpatía y protección, conformidad con los deseos del grupo, asociación deseada, etc.
- (v) Gratificaciones sensoriales: visuales, gustativas, olfativas, táctiles, etc.
- (vi) Consistencia cognitiva: consistencia en el conocimiento y en las opiniones, exploración y adquisición de conocimiento, creencias, verdad, belleza, religión, etc.

Se llama comportamiento, a la elección de acciones, que pueden incluir ajustes a valores ideales, para trasladar las percepciones en metas ideales de equilibrio. Algunas metas, tales como la acumulación de bienestar, riqueza y reputación; se caracterizan porque *más es mejor*. No obstante, otras, como la temperatura del cuerpo humano y la salud fisiológica, tienden a mantener valores fijos, y las desviaciones notables de estos valores fijos, suelen derivar en enfermedades. La búsqueda de metas, que está bien documentada en la literatura psicológica, tiene un importante impacto en la vida de las personas y en su forma de proceder o toma de decisiones. Estas ideas se sintetizan en la siguiente definición:

Definición 1.4.3.1. La propuesta de metas para hallar soluciones satisfactorias, es el proceso de identificar un conjunto de objetos satisfactorio S , tal que, cuando el resultado de la decisión es un elemento de S , el decisor se sentirá feliz y satisfecho de haber tomado una decisión que es óptima para él.

Cuando se admite la idea de Pareto de que más es mejor, y $f = (f_1, \dots, f_n)$, son los objetivos, una forma adecuada de definir un conjunto satisfactorio es:

$$S = \{x \in X \mid f_j(x) \geq a_j, j = 1, \dots, n\}$$

siendo cada $f_j: X \rightarrow R, j = 1, \dots, n$, un objetivo.

Cuando el estado ideal del objetivo j -ésimo, consiste en alcanzar un valor y_0 , para hallar el estado satisfactorio se utiliza el conjunto:

$$S_j = \{x \in X \mid b_j \geq f_j(x) \geq a_j\}$$

donde $b_j \geq y_0 \geq a_j$ son valores prefijados de antemano.

Cuando se considera más es peor, el estado ideal del objetivo j -ésimo es, no superar un valor fijo y_0 . Para definir el conjunto satisfactorio, se construye el conjunto:

$$S_j = \{x \in X \mid y_0 \geq f_j(x)\}.$$

Por comodidad se trabajará con el espacio Y de resultados.

Teorema 1.4.3.1. Dado un conjunto satisfactorio S , las preferencias de los resultados satisfactorios vienen dadas por:

$$(y^1, y^2) \in \{>\} \Leftrightarrow y^1 \in S \text{ e } y^2 \in Y \setminus S$$

$$\{y^1 <\} = \emptyset \Leftrightarrow y^1 \in S$$

$$\{y^1 <\} = S \Leftrightarrow y^1 \in Y \setminus S$$

$$\{y^1 >\} = Y \setminus S \Leftrightarrow y^1 \in S$$

$$\{y^1 >\} = \emptyset \Leftrightarrow y^1 \in Y \setminus S$$

NOTA: Si $Y \cap S \neq \emptyset$, el conjunto no dominado es $N = Y \cap S$ y el conjunto dominado es $D = Y \setminus N$. Si $Y \cap S = \emptyset$, entonces no existe solución satisfactoria respecto del conjunto satisfactorio S . En este caso, para hallar una solución, se debe aumentar S , o aumentar el conjunto de objetos para aumentar el conjunto de resultados, o bien introducir el concepto de solución de compromiso que se considera posteriormente.

Para resolver el problema multiobjetivo, con solución satisfactoria, se define S como la unión de los conjuntos

$$S_k = \{f(x) \mid G_k(f(x)) \geq 0\}, k=1, \dots, r,$$

donde G_k es una función vectorial que refleja los intercambios sobre f .

Para verificar si $Y \cap S_k$ es, o no, el conjunto vacío, y encontrar un punto de dicho conjunto en el caso de no ser vacío, se puede utilizar el siguiente programa de programación matemática. El conjunto anterior se puede reescribir en la forma:

$$S_k = \{f(x) \mid G_{kj}(f(x)) \geq 0, j = 1, \dots, J_k\},$$

donde $G_{kj}, j = 1, \dots, J_k$, son las componentes de G_k y J_k es el número de componentes de G_k .

Programa 1.4.3.1

$$V_k = \min \sum_{j=1}^{J_k} d_j$$

$$\text{sujeto a: } G_{kj}(f(x)) + d_j \geq 0, j = 1, \dots, J_k$$

$$x \in X$$

$$d_j \geq 0, j = 1, \dots, J_k$$

Es claro que $Y \cap S_k \neq \emptyset$, si y sólo si, $V_k = 0$.

Se resume, en un esquema por etapas, los métodos interactivos para la búsqueda de soluciones satisfactorias:

Paso 1. Se fijan los elementos de un problema multiobjetivo: (X, f, Y) .

Paso 2. Se construye el conjunto satisfactorio: $S = \bigcup_{k=1}^r S_k$.

Paso 3. Se resuelve el correspondiente problema 1.4.3.1.

Paso 4. Si $S \cap Y = \emptyset$, se va al paso 6; en otro caso, se va al paso 5.

Paso 5. Identificar una solución satisfactoria de S , e intercambiar información con el decisor. Ir al paso 7.

Paso 6. Interaccionar con el decisor para redefinir el problema. Volver al paso 1.

Paso 7. ¿Está el decisor satisfecho con la solución satisfactoria encontrada?. Si la respuesta es afirmativa parar, el problema está resuelto; en otro caso ir al paso 8.

Paso. Obtener más información del decisor para reformular el problema, calculando con los nuevos elementos del problema (X, f, Y) , un nuevo conjunto satisfactorio S . Volver al paso 3, con los nuevos elementos del problema de decisión.

1.4.4. Soluciones de compromiso

Cuando no existe una solución satisfactoria, se suele buscar una solución de compromiso. Una solución de compromiso es aquella que está tan próxima al conjunto S de soluciones satisfactorias como sea posible, según alguna función distancia que satisfaga los deseos del decisor. El objetivo es encontrar una especie de compromiso, de ahí su nombre, entre lo deseable, solución satisfactoria, y lo posible.

Para facilitar la definición de la distancia entre el conjunto factible y el conjunto satisfactorio S , se suele exigir que este último conjunto contenga un sólo punto, punto que se denomina el *ideal* o *utopía*. Para aquellos objetivos en que *más es mejor*, las componentes del punto ideal se calculan por la fórmula:

$$y_j^* = \max\{f_j(x) | x \in X\}$$

en los que *más es peor*, el punto ideal se calcula por la fórmula:

$$y_j^* = \min\{f_j(x) | x \in X\}$$

y, en los que se deben mantener en *un punto fijo*, dicho punto es el ideal.

Para hallar soluciones de compromiso se debe disponer de una familia de distancias D , de tal forma que para cada punto eficiente $y^0 \in N$, exista un $D \in D$, tal que:

$$\min_{y \in Y} (D(y, y^*)) = D(y^0, y^*)$$

Cumpliendo esta condición la familia de distancias D , debe ser lo más sencilla posible.

Una de estas familia de distancias es la L_1 ponderada, donde se define la distancia como

$$D(y, y^*) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (y_j^* - y_j)$$

para $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$. Esta distancia es suficiente, cuando la envoltura convexa del espacio de resultados no tiene en su interior ningún punto eficiente, según se demostró en el apartado tercero.

Cuando la distancia L_1 no es suficiente, se utiliza la distancia L_∞ ponderada. Con esta familia de distancias, se obtienen todos los puntos eficientes. Esta distancia se define por las formulas: $D(y^0, y^*) = t_0$, donde y^0 es la solución en el espacio de resultados del problema:

$$\begin{aligned} t_0 &= \min t \\ \text{sujeto a: } & y_j^* - y_j \leq a_j t \end{aligned}$$

donde $a_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

Las distancias L_1 y L_∞ ponderadas, sólo son válidas para los casos en que más es mejor, o más es peor; pero no para el caso en que el punto ideal es un punto intermedio; en cuyo caso la distancia útil es la de la *programación por metas*; que se define como sigue:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{j=1}^n (p_j d_j^+ + q_j d_j^-) \\ \text{sujeto a: } & f_j(x) + d_j^- - d_j^+ = y_j^* \quad \text{para } j = 1, \dots, n \\ & d_j^+ \geq 0, \quad d_j^- \geq 0, \quad d_j^+ \cdot d_j^- = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, n \\ & x \in X \end{aligned}$$

p_j, q_j , para $j = 1, \dots, n$, representan ponderaciones de las desviaciones al punto ideal. Se verifica $d_j^+ + d_j^- = |y_j^* - y_j|$.

Cuando hay objetivos de varias clases se deben mezclar distancias apropiadas en función del significado de las componentes del espacio de resultados, colocando las ponderaciones adecuadas.

Los problemas multiobjetivo, resueltos mediante soluciones de compromiso, se asemejan bastante a los problemas de decisión en grupo, cuando cada objetivo representa la ganancia de cada miembro del grupo. Cuando y^* es alcanzable, cada jugador se debe sentir feliz porque alcanza su máxima ganancia. La ganancia representada en $x \in X$ no puede ser mejorada por ningún miembro del grupo, incluso aunque sea un dictador. Este hecho, sirve también para explicar el nombre de *solución de compromiso*.

Si se toma como solución del problema de decisión en grupo a $y \in Y$, la pérdida que los miembros del grupo sufren al sustituir y por y^* , se suele medir por una distancia entre y e y^* :

$$r(y) = D(y, y^*) = \|y - y^*\|.$$

Definición 1.4.4.1. La *solución de compromiso* del problema de decisión en grupo con respecto a una distancia D , se denota por y^D , siendo y^D , tal que

$$D(y^D, y^*) = \min_{y \in Y} (D(y, y^*)) = r(y^D).$$

OBSERVACIÓN: En los problemas de decisión en grupo, $r(y^D)$ se interpreta como el *regret* o pérdida, cuando el grupo admite como solución la solución de compromiso y^D que es el valor que minimiza la pérdida del grupo, para mantener un espíritu cooperativo.

Sea la pérdida, asociada a la distancia L_q ponderada, con vector de ponderaciones $w = (w_1, \dots, w_n)$, $w \geq 0$, definida por la fórmula:

$$r(y, q, w) = \left(\sum_{j=1}^n (w_j^q |y_j^* - y_j|^q) \right)^{1/q}.$$

Definición 1.4.4.2. La *solución de compromiso* del problema de decisión en grupo con respecto a la distancia definida previamente, es y^{qw} , que minimiza $r(y, q, w)$ sobre Y ; o bien x^{qw} , que minimiza $r(f(x), q, w)$ sobre X .

Cuando $w = 1$, la distancia es L_q sin ponderar, y la pérdida se denota por $r(y, q)$. Análogamente, la pérdida definida mediante una distancia D , se denota $r(y, D)$.

Definición 1.4.4.3. Dado $r(y, q)$, se define la preferencia en el espacio de resultados como:

$$y^2 \succ y^1, \text{ si y sólo si, se verifica: } r(y^1, q) > r(y^2, q).$$

Teorema 1.4.4.1.

- (i) Las preferencias definidas por $r(y, q)$ son un orden débil completo.
- (ii) $y^0 \in Y$, es la solución de compromiso respecto de $r(y, q)$, si y sólo si, $y^0 \in N(\{>, Y\})$.

Si Y es un conjunto compacto no vacío, el punto satisfaciente o satisfactorio y^* es el punto ideal (es decir $y_j^* = \sup\{f_j(x) | x \in X\}$) y, la preferencia para cada criterio, está caracterizada por *más es mejor*; entonces, las soluciones de compromiso satisfacen las siguientes propiedades generales de:

P1) (*Factibilidad*). La solución de compromiso es factible; esto es, $y^D \in Y$, denotando por y^D una solución de compromiso respecto de alguna distancia D .

P2) (*Mínima pérdida del grupo*). Para cualquier distancia D , la solución de compromiso y^D , debe ser tal que $r(y^D, D) = \min(r(y, D))$, cuando $y \in Y$.

P3) (*No dictadura*). Para hallar soluciones de compromiso, se deben utilizar distancias tales que las soluciones de compromiso asociadas no se obtengan por un proceso dictatorial. Esto es, no existe un miembro del grupo j tal que y^D , quede totalmente determinada por la función objetivo del miembro del grupo (dictador) j -ésimo. Las distancias L_q , ponderadas y sin ponderar, satisfacen esta propiedad.

P4) (*Optimalidad de Pareto*). Cuando los objetivos son tales que más es mejor, las soluciones de compromiso y^D , son soluciones en el sentido de Pareto. Con distancias L_q ponderadas, con pesos positivos, para $1 \leq q < \infty$, las soluciones de compromiso, denotadas por y^q , son soluciones de Pareto y, para L_∞ , la solución es de Pareto cuando es única.

P5) (*Unicidad*). Para $1 < q < \infty$, la solución y^q , es única cuando Y es A^\leq -convexo. Si Y es estrictamente convexo, entonces y^1 e y^∞ son también únicos.

P6) (*Simetría*). Si Y es convexo y cerrado respecto a una rotación cíclica, entonces, para $1 < q < \infty$, todas las coordenadas de la solución de compromiso para las distancias no ponderadas, son iguales. Cuando $q=1$ o $q=\infty$, existen al menos dos componentes de la solución de compromiso que son iguales.

P7) (*Independencia de alternativas irrelevantes*). Sea $Y_0 \subset Y$, tal que

$$\sup\{y_j \mid y \in Y_0\} = \sup\{y_j \mid y \in Y\} = y_j^*, \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

Si para $1 \leq q \leq \infty$, la solución de compromiso es $y^q \in Y_0$, entonces y^q es también una solución de compromiso respecto $r(y, q)$ sobre Y_0 .

P8) (*Continuidad*). Si Y es compacto y A^\leq -convexo, entonces para $1 < q < \infty$, la solución de compromiso $y^q \in Y$ es continua en q . Además, si y^1 es única, entonces y^q es continua en $q=1$, y si y^∞ es única, y^q es continua en $q=\infty$. Se recuerda que si Y es estrictamente convexo, entonces las soluciones de compromiso y^1 e y^∞ son únicas.

Lema 1.4.4.2. Las normas $\|y\|_q$, $1 \leq q \leq \infty$, definidas en el espacio euclídeo, finito dimensional, R^n , son una familia de funciones equicontinuas; es decir, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un entorno $N(0, \varepsilon)$, tal que para cualquier $y^0 \in Y$, se verifica:

$$\left| \|y\|_q - \|y^0\|_q \right| < \varepsilon$$

para todo q , siempre que $y \in y^0 + N(0, \varepsilon)$.

Lema 1.4.4.3. Sea $s \geq 1$ fijo. Entonces, cuando $q \rightarrow s$, se verifica: $\|y\|_q \rightarrow \|y\|_s$. Además, la convergencia es uniforme sobre cada compacto Y de R^n .

P9) (*Monotonía en general*). Sea L la línea de igual pérdida. L se determina por la ecuación: $y_1^* - y_1 = y_2^* - y_2 = \dots = y_n^* - y_n$. Sea $B_q = \{y \in R^n \mid r(y, q) = r(y^q, q)\}$. Sea v^q el punto de intersección de B_q con la parte positiva de L . Se tiene $y_j^* - v_j^q = d^q$

para $j = 1, \dots, n$. d^q es una función de q . La función d^q es monótona no crecientes para $1 \leq q \leq \infty$.

P10) Se satisfacen las siguientes cotas:

$$(i) \text{ Para } 1 \leq s \leq \infty, \quad \sum_{j=1}^n v_j^\infty \leq \sum_{j=1}^n y_j^s \leq \sum_{j=1}^n y_j^1.$$

$$(ii) \text{ Si } y^\infty \in L, \text{ entonces: } \sum_{j=1}^n y_j^\infty \leq \sum_{j=1}^n y_j^s \leq \sum_{j=1}^n y_j^1, \text{ para } 1 \leq s \leq \infty.$$

P11) (*Monotonía en dos objetivos*). Si $n=2$ y $1 \leq s \leq r \leq \infty$, entonces:

$$(i) \quad \sum_{j=1}^n y_j^r \leq \sum_{j=1}^n y_j^s$$

$$(ii) \quad \max_j \{y_j^* - y_j^r\} \leq \max_j \{y_j^* - y_j^s\}$$

(iii) Además, si Y es compacto y A^{\leq} $-$ convexo, entonces y_j^q es una función monótona en q . Si y_1^q es una función monótona creciente en q , entonces y_2^q es monótona decreciente, y viceversa.

Se finaliza este apartado, formulando algunos problemas de programación matemática cuya resolución permite calcular soluciones de compromiso.

Programa 1.4.4.1.

$$\min \sum_j |y_j^* - f_j(x)|^q = \min[r(f(x), q)]^q$$

$$\text{sujeto a:} \quad x \in X$$

Programa 1.4.4.2.

$$\min \sum_{j=1}^n (d_j^+ + d_j^-)^q$$

$$\text{sujeto a:} \quad f_j(x) + d_j^- - d_j^+ = y_j^* \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

$$d_j^+ \geq 0, \quad d_j^- \geq 0, \quad d_j^+ \cdot d_j^- = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

$$x \in X$$

OBSERVACIÓN: En el programa anterior se puede prescindir de la restricción: $d_j^+ \cdot d_j^- = 0$, para $j = 1, \dots, n$.

1.4.5. Función de valor

El objetivo de la función de valor consiste en construir una función $V: Y \rightarrow R$, cuya estructura de preferencia sea consistente con la estructura de preferencia del decisor. El resultado que maximiza la función de valor es la solución del problema.

Los sistemas numéricos, como gran invento de La Humanidad, siguen teniendo un impacto que prevalece en nuestra cultura y pensamiento. Por tanto, es importante la pregunta: ¿Es posible expresar nuestras preferencias sobre el espacio de resultados en términos numéricos, de tal forma que cuanto mayor sea el número conseguido, más valioso es el resultado?. Y, si esto es así, ¿cómo se puede conseguir este objetivo?.

Una forma fácil de definir las preferencias mediante números, es utilizando una función distancia entre cada punto y el punto ideal, distancia que debe modelizar el comportamiento humano, en la propuesta y búsqueda de metas. Si se conocen nuestras metas y el punto ideal, se puede construir siempre esta función distancia. Conocida la función distancia, la búsqueda de la solución consiste en hallar el resultado que se encuentre a distancia mínima del punto ideal o blanco.

En contraste con la utilización de las distancias, existe una escuela de pensamiento que pretende asignar a cada resultado una utilidad o valor para el decisor; y el decisor debería elegir aquel resultado que maximice su utilidad. Respecto a este planteamiento, se pueden formular, de forma inmediata, las siguientes cuestiones: ¿Existen funciones de valor definidas sobre el espacio de resultados Y con valores en los números reales, $V(y)$ tales que, $y^1 > y^2 \Leftrightarrow V(y^1) > V(y^2)$?. ¿Bajo qué condiciones existen tales funciones?. En caso de existir, a la función $V(y)$, se la denomina *función de valor*, en lugar de función de utilidad; término, este último, que se reserva para aquellos casos en que los resultados son inciertos. La colección de las curvas isovaluadas de V en Y , se define por: $\{Z(a) | Z(a) = \{y \in Y | V(y) = a\}\}$. Las curvas isovaluadas, son de gran ayuda para facilitar la construcción de la función de valor.

Lo expuesto sobre funciones de valor, es suficiente para los objetivos de este trabajo. El lector interesado en ampliar conocimientos puede consultar las obras [6] y [26].

1.4.6. Estructuras de preferencia dinámicas

La clase de métodos dinámicos que se analizan en este trabajo, se caracterizan porque el decisor va cambiando su estructura de preferencia a lo largo del tiempo, dependiendo de dos clases de información: *i)* la información suministrada por el analista de manera progresiva y *ii)* la información surgida de las discusiones conjuntas del decisor con el analista, aunque el cambio de preferencias siempre debe realizarlo el decisor.

Se desarrollan estas técnicas evolutivas en dos partes. En primer lugar, se considera que el problema sea multiobjetivo, en cuyo caso se obtienen los *métodos interactivos* y, a continuación, se estudian las técnicas que se aplican a la decisión multiatributo, en cuyo caso se obtienen las *técnicas out- ranking*.

1.4.6.1. Métodos interactivos

Las técnicas interactivas consisten en refinar progresivamente la estructura de preferencia del decisor por intercambio de datos entre el decisor y el analista, después de que el analista presente al decisor una o más soluciones eficientes plausibles. Debido a la infinidad de formas que hay de intercambiar datos y refinar la estructura de preferencia, el número de técnicas interactivas es prácticamente infinito.

Estos métodos necesitan la propuesta de buenas metas y distancias, por parte del decisor. En función de estas metas y distancias, se generan soluciones eficientes o no dominadas, de forma interactiva y dinámica entre el decisor y el analista. Las soluciones que se generan de forma dinámica, deben tender progresivamente a la solución del problema, solución que debe satisfacer los deseos del decisor; esto es, el proceso interactivo debe ser tal que al final se halle una solución que satisfaga plenamente los deseos del decisor. Como se ha señalado, en los métodos interactivos se van identificando, por una parte, buenas soluciones candidatas para la solución final; mientras que por otra, se buscan datos adicionales sobre las preferencias del decisor entre distintas soluciones, para que con la información generada, se puedan seleccionar las mejores soluciones candidatas. El proceso finaliza, cuando se halle una solución que satisfaga los deseos del decisor.

Los métodos interactivos son muy útiles en aquellos casos en los que es muy difícil, o muy costoso, obtener toda la información relevante sobre el espacio de resultados, que es necesaria para hallar la mejor solución. En la aplicación de cualquier técnica interactiva, es prioritario obtener datos parciales sobre preferencias entre resultados, para poder continuar con la progresión del método. Suele ser inapropiado dedicar mucho tiempo y pensamiento a la búsqueda de preferencias absolutas, ya que se pueden producir al mismo tiempo otros sucesos que son más relevantes para el decisor. Los recursos consumidos en la búsqueda de datos suelen resultar ineficaces cuando se logra con rapidez una buena solución. En la práctica, se pueden construir muchos métodos interactivos, tantos como emergen de los hechos combinados: generación de datos, por parte del analista, y el intercambio de datos, entre el analista y el decisor.

El diseño e implementación de cualquier método interactivo es un arte. Su éxito no sólo depende del método en sí, sino también fundamentalmente de la comunicación que se establezca entre el analista y el decisor. Es opinión generalizada, que cualquier método interactivo puede tener éxito, siempre que su funcionamiento sea comprendido y aceptado por parte del decisor.

Cuando se analizan problemas multiobjetivo, existen, en términos amplios, tres formas de análisis. Estas formas son:

(i) *Forma Cerrada del Análisis.*

Se aplica, cuando se combinan los n objetivos en una función de valor, $V(f_1, \dots, f_n)$, de tal forma que, $u > v$, equivale a, $V(f_1(u), \dots, f_n(u)) > V(f_1(v), \dots, f_n(v))$. En tales casos, el problema se reduce a calcular el máximo de la función de valor V . El método cerrado de análisis, se llama en la literatura multiobjetivo *método clásico*.

(ii) *Forma Abierta del Análisis.*

Consiste en mostrar al decisor el conjunto total de resultados $Y = f(x)$, donde $f(x) = \{y | y = f(x) \text{ para algún } x \in X\}$. Aunque el método es, en teoría, el más fácil de todos, ya que no necesita identificar las estructuras de preferencia, sin embargo, suele ser muy difícil de aplicar en la práctica, debido a la gran cantidad de información que, en la mayoría de los problemas, es necesario analizar.

(iii) *Formas Parcialmente Abiertas y Cerradas del Análisis.*

Son formas de análisis intermedias entre las dos anteriores. Esta metodología es la que se suele utilizar en la programación interactiva. El caso más simple se reduce al análisis evolutivo de las soluciones eficientes $N(Y/EP)$.

En la programación multiobjetivo interactiva, se usa un método que combina técnicas de optimización matemática, con intercambio de datos entre el decisor y el analista. Este intercambio de datos, se logra formulando cuestiones apropiadas que interactúan entre el analista y el decisor, como resultado del cual, se explora sólo un subconjunto adecuado del espacio Y de resultados, tratando de hallar en este subconjunto aquella solución no dominada que sea la más aceptable para el decisor. La parte más importante de estos métodos está en la obtención, por parte de la conjunción entre analista y decisor, de la información más relevante para que el proceso de búsqueda de la solución, avance en la dirección apropiada.

Elementos fundamentales de la programación interactiva son: El punto ideal, La propuesta de metas, Las familias de distancias, Las familias de funciones de valor, etc.; elementos que se van modificando de forma evolutiva por el intercambio de datos entre el analista y el decisor, hasta que se obtiene una solución eficiente que sea satisfactoria para el decisor. La formalización de estos conceptos, y las técnicas para hallar las soluciones, se desarrollan en el capítulo segundo de este trabajo.

1.4.6.2. Métodos out-ranking

Se aplican a problemas de decisión multiatributo. Tienen como fundamento los mismos principios que las técnicas interactivas. Los refinamientos de las estructuras de preferencia se suelen hacer refinando los preordenes definidos sobre el conjunto O de objetos, hasta que el decisor pueda quedarse con su objeto preferido.

Los problemas multiatributo se caracterizan por hallar el mejor objeto de un conjunto finito de objetos. Como suele ser difícil comparar entre sí los objetos, se suele medir sobre cada uno de los objetos un número finito de características, cada una de las cuales toma un número finito de valores. Los diferentes valores que toman las características sirven para comparar los distintos objetos.

Este tipo de situaciones se presenta con gran frecuencia en la práctica. En muchas de estas situaciones, suele suceder que se dispone de escasos datos sobre los objetos, por lo que no pocas veces los objetos eficientes respecto de los datos disponibles, no son las verdaderas soluciones del problema. La palabra objeto se debe entender en un

sentido muy amplio, pudiendo ser un elemento cualquiera, un coche, un piso, un ordenador, la elección de una situación, una inversión, etc.

Los datos de un problema multiatributo se sintetizan en una tabla como la siguiente, donde cada $x_{ij} \in D_j$, para $j = 1, \dots, p$, siendo D_j un conjunto finito de valores totalmente ordenado. Se supone que los objetos que tienen los mayores valores en cada D_j , son los mejores. Los datos teóricos del problema se resumen en la tabla 2.

	X_1	X_2	...	X_j	...	X_p
o_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1p}
o_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2p}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
o_i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{ip}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
o_k	x_{k1}	x_{k2}	...	x_{kj}	...	x_{kp}

Tabla 2

En la práctica, no se suelen tener tantos datos cuando se trata de un problema concreto. Suele ser difícil de precisar quiénes son los conjuntos D_j , así como fijar los valores de cada opción u objeto en cada conjunto. El hecho de soslayar estas dificultades, planteando el problema en forma determinística, puede conllevar a que la verdadera solución del problema no sea ningún objeto eficiente. En la práctica, no suele haber inconsistencia en que el decisor elija como mejor objeto a uno que no sea eficiente. La aleatoriedad o difusidad bien entendida, puede ayudar en la modelización de los problemas multiatributo con información incompleta. No obstante, a nivel teórico, cuando se plantea el problema en forma determinística, se admitirá la hipótesis de que la solución del problema debe ser eficiente. Debido al planteamiento del problema, es claro, que las opciones eficientes lo son en el sentido de Pareto.

Un método muy general para hallar la solución de un problema multiatributo es utilizar la técnica interactiva de la distancia L_1 o L_∞ . Se aplica el método L_1 , cuando con esta técnica se pueden hallar todas las soluciones eficientes y, cuando esto no ocurre, se aplica el método de la métrica de *Tchebycheff ponderada*. Ambos métodos, ya fueron descritos en apartados anteriores.

Otra técnica de carácter general es la de *Marcotte y Soland*, que consiste en dividir el conjunto inicial de puntos eficientes en varios subconjuntos, no necesariamente disjuntos, calculando el punto ideal para cada uno de los subconjuntos y, eligiendo también de cada subconjunto, un punto eficiente. El decisor debe comparar el mejor punto eficiente hallado hasta ese momento, con los puntos eficientes seleccionados en

cada etapa, quedándose para la siguiente etapa únicamente con el mejor punto eficiente. Se describirá con más detalle este algoritmo en el capítulo segundo.

Aunque las técnicas de las distancias L_1 o L_∞ , son válidas para resolver los problemas multiatributo, no suelen ser las más apropiadas. Teniendo como información que el número de objetos u opciones es finito, se han desarrollado muchas técnicas específicas para resolver este tipo de problemas. Entre estas técnicas se analizarán las de ordenación (*out-ranking*). Los métodos de ordenación, tienen por fundamento utilizar la comparación por pares de las opciones, con el fin de construir ordenes parciales, cada vez más finos, hasta obtener un orden parcial tal que, los objetos no dominados por este orden parcial, se puedan admitir como solución del problema multiatributo. La forma general de estas técnicas se fundamenta en los siguientes pasos:

(I) Se define un orden parcial de preferencia P entre los objetos O , basado en las comparaciones por pares de objetos, determinando el conjunto de objetos O_1 que son no dominados por el orden P . Se coloca $h=1$, y se va a (II).

(II) Si O_h se puede admitir como solución del problema, se para; en otro caso, se va al paso (III).

(III) Se define un nuevo orden parcial P_h , sobre el conjunto de objetos O_h , calculándolo el conjunto de objetos O_{h+1} que son no dominados respecto del orden P_h . Se coloca $h=h+1$ y se vuelve al paso (II).

Cada técnica queda caracterizada por la construcción de los distintos órdenes de preferencia P_h . En el trabajo se analizan, entre otras, las metodologías *PROMETHÉE* y *ELECTRE*. Para construir los distintos órdenes de preferencia, la metodología *PROMETHÉE* utiliza el símil de flujos en redes. En cada ciclo se construye un grafo dirigido completo, de tal forma que los vértices son los objetos. A cada arco se le asigna un número que se denomina flujo. Estos flujos se utilizan para construir el orden parcial entre los objetos. El método *PROMETHÉE* construye los órdenes parciales utilizando los conceptos de *índices de concordancia* y *discordancia* entre los objetos.

De forma similar al método *PROMETHÉE*, el método *ELECTRE* pertenece a las técnicas denominadas de ordenación (*out-ranking*). Para establecer la relación de preferencia entre cada par de objetos, la metodología *ELECTRE* necesita realizar una partición del conjunto de características utilizando el siguiente criterio: Para cada par de objetos, O_1 y O_2 , se clasifican las características en tres clases; la primera clase, contiene las características en las que el valor del primer objeto es mejor que el valor del segundo objeto; la segunda clase, contiene las características en las que los valores de ambos objetos son iguales; y la tercera clase, contiene las características en las que el valor de primer objeto es peor que el valor del segundo objeto. En función de esta clasificación se define un orden parcial entre los pares de objetos.

Los métodos de la teoría de decisión multiatributo, construyen funciones que permiten ordenar todos los objetos de mejor a peor. El método suministra mucha más información que la relación de dominancia. El objetivo de los métodos *out-ranking* es preguntar al decisor cuestiones menos complicadas que las que son necesarias para resolver los problemas multiobjetivo. El objetivo es obtener una relación binaria

intermedia entre la relación de dominancia inicial, demasiado pobre para ser útil y la función de utilidad multiatributo, demasiado rica como para ser fiable. Los métodos pretenden enriquecer las relaciones de dominancia, con el fin de seleccionar el mejor objeto. El término *out-ranking* se debe a B. Roy, que puede ser considerado como el fundador de estos métodos. Roy definió la relación *out-ranking* como una relación binaria S , definida sobre el conjunto de objetos O ; de tal forma que $(a, b) \in S$ si, dada la información proporcionada por el decisor, la calidad de las evaluaciones de los objetos y la naturaleza del problema; existen bastantes argumentos para concluir que a es al menos tan bueno como b , mientras que no existen razones esenciales para refutar esta sentencia. Esta definición no es precisa sino que trata de recoger una idea muy general. Los métodos *out-ranking* propuestos en la literatura difieren, entre otros aspectos, en la forma en que se precisa la definición.

1.5. Metodo del Simplex Multiobjetivo

La técnica abierta multiobjetivo, consiste en presentar al decisor el conjunto total de resultados:

$$Y = \{y = f(x) | x \in X\}, \text{ siendo } X = \{x = V(o) | o \in O\}$$

de entre los cuáles, el decisor debe elegir el mejor resultado. La técnica abierta es muy difícil de aplicar en general, y sólo se utiliza en problemas que tienen una formulación sencilla, como ocurre en el problema lineal. Con todo, se suele reducir el espacio total de resultados Y a un subconjunto menor, mediante alguna estructura de preferencia EP . En este caso, se deben presentar al decisor tan sólo el conjunto de puntos eficientes respecto de la estructura de preferencia EP ; esto es, $N(Y / EP)$.

En el modelo lineal, el conjunto de características X es un subconjunto convexo de R^m . Para definir X , se dispone de m funciones lineales $\{g_i\}$, $i = 1, \dots, p$, tales que cada g_i se define por la fórmula:

$$g_i(x) = \sum_{k=1}^m a_{ik} x_k$$

y de un vector $b \in R^p$. El conjunto X se define por la fórmula:

$$X = \{x \in R^m | g_i(x) \leq b_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, p\} = \{x \in R^m | Ax \leq b\}$$

que es un conjunto convexo de R^m . La matriz A es una matriz de dimensión $p \times m$, formada por los coeficientes de las funciones $\{g_i\}$, $i = 1, \dots, p$.

Además se dispone de n funciones objetivo lineales $\{C_j\}$, $j = 1, \dots, n$, donde

$$C_j(x) = \sum_{k=1}^m c_{jk} x_k$$

siendo

$$Y = \{y \in R^n | y = C_j(x), j = 1, \dots, n, x \in X\} = \{y \in R^n | y = Cx, x \in X\}$$

En programación lineal multiobjetivo, se utiliza como estructura de preferencia la de Pareto, donde más es mejor respecto del espacio de resultados Y . Los puntos eficientes o no dominados son:

$$N(X/Y) = \{x \in R^m \mid Cx \text{ es no dominado en } Y\}.$$

Resolver el problema multiobjetivo consiste en presentar al decisor el conjunto de puntos eficientes $N(X/Y)$.

En $N(X/Y)$ los puntos eficientes se clasifican en dos clases: La primera está formada por los puntos extremos de X que son eficientes y, la segunda, está formada por los puntos eficientes que son combinación convexa estricta de puntos extremos eficientes. Por tanto, resolver el problema del simplex multiobjetivo, consiste en hallar en primer lugar los puntos extremos eficientes $\{x^1, x^2, \dots, x^j, \dots, x^N\}$ y, en segundo lugar, las caras eficientes, que están formadas por subconjuntos de puntos extremos eficientes tales que cualquier combinación convexa de los puntos de la cara sea eficiente.

Para hallar los puntos extremos eficientes, se debe tener en cuenta que cada punto extremo eficiente es solución del problema lineal uniobjetivo:

$$\max \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j(x)$$

sujeto a $x \in X$, con todos los λ_j no negativos y tales que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1.$$

Un resultado que facilita el cálculo de puntos extremos eficientes es el siguiente: Si se forma un grafo no dirigido G , de tal forma que sus vértices sean los puntos extremos de X y, que dos vértices forman una arista cuando, y sólo cuando, en el algoritmo del simplex un punto extremo se pueda obtener del otro por un solo pivotaje uniobjetivo; entonces, cuando X está acotado, el conjunto de puntos extremos eficientes forma un subgrafo conexo del grafo G .

Para ver si un subconjunto de puntos eficientes $\{x^{j_s}\}$, $1 \leq s \leq r$, donde para todo s , $j_s \in \{1, 2, \dots, N\}$ forman una cara eficiente, se debe contrastar si un punto z obtenido por combinación convexa de todos ellos,

$$z = \sum_{s=1}^r \mu_s x^{j_s}$$

con $\mu_s > 0$ para todo s , es o no eficiente. Si es eficiente, la cara es eficiente y, si no es eficiente, la cara no es eficiente.

CAPÍTULO 2

TÉCNICAS DE SOLUCIÓN

2.1. Introducción

Resolver un problema multiobjetivo, propuesto por una séxtupla (O, V, X, f, Y, EP) , consiste en la elección del mejor objeto, es decir, en aplicar una técnica mediante la cual se selecciona uno, o más objetos, que son los mejores para el decisor. Ser lo mejor para el decisor significa que éste debe sentirse satisfecho con la elección. El significado de mejor objeto, se debe entender siempre en el sentido de satisfacer los deseos del decisor. Si el analista aplica una técnica con la que consigue un objeto que tiene excelentes cualidades, pero que no satisface los deseos del decisor, entonces no se ha logrado hallar la solución del problema. El objeto que maximiza una buena función objetivo, propuesta por un excelente analista, no tiene por qué ser la solución del problema multiobjetivo, si la función objetivo no está de acuerdo con los deseos del decisor. Conseguir una buena concordancia, entre decisor y analista, no suele ser una tarea fácil; por ello, es necesario crear un ambiente que facilite la fluidez en el diálogo entre ambos.

La dificultad de lograr la conformidad necesaria entre decisor y analista, ha obligado al desarrollo de muchas técnicas, cuyo objetivo es facilitar a los analistas la difícil tarea de entendimiento con el decisor. Este capítulo, se dedica al desarrollo de las técnicas fundamentales que se utilizan en la resolución de los problemas de programación multiobjetivo. De las anteriores consideraciones, se deduce que toda técnica multiobjetivo suele constar de dos fases: la fase de cálculo y la fase de diálogo con el decisor.

Durante la fase de cálculo, el analista calcula una o más soluciones, es decir, halla uno o más objetos; objetos que presenta al decisor, para que éste los analice y decida sobre su bondad. Si entre los objetos seleccionados en esta fase, se encuentra alguno que satisfaga los deseos del decisor, se ha hallado la solución del problema y el proceso finaliza. En otro caso, se pasa a la fase de diálogo.

Durante la fase de diálogo, el analista debe obtener del decisor datos relevantes sobre la falta de bondad de los objetos propuestos como solución en las fases previas. Con la información obtenida, el analista debe ser capaz de modificar sus modelos de cálculo, de tal forma que le permitan hallar nuevas soluciones que estén más próximas a los gustos del decisor, que las previamente calculadas. Durante el proceso de diálogo suele jugar un papel importante el concepto de solución ideal para el decisor, solución que en la práctica resulta ser inalcanzable. La modificación de esta solución ideal por parte del decisor, en el transcurso del proceso, hace posible encontrar alguna solución satisfactoria.

A continuación, se exponen las técnicas más importantes destinadas a hallar la solución en problemas de programación multiobjetivo. El capítulo se desarrolla en los siguientes epígrafes.

La introducción, se dedica a exponer conceptos que faciliten la explicación de técnicas algorítmicas, aplicadas en la resolución de los problemas multiobjetivo. En el epígrafe segundo, se expone la forma de obtener una solución por la técnica clásica, consistente en maximizar una función de valor. El objeto que maximiza la función de valor debe ser el mejor para el decisor, cuando éste acepta dicha función. En el epígrafe tercero, se expone como se hallan las soluciones por técnicas satisfacientes y técnicas de compromiso. Se desarrollan varias técnicas satisfacientes y, entre las técnicas de compromiso, se desarrollan las formuladas por las distancias L_1 ponderada, L_q ponderada, L_∞ ponderada, y la programación por metas. En el epígrafe cuarto, se exponen los conceptos para el desarrollo de las técnicas interactivas. Se detallan los elementos necesarios para la descripción de estas técnicas, destacando el concepto clave de punto ideal. Se explican los principales resultados basados en las distancias L_1 ponderada, L_∞ ponderada y la distancia del valor absoluto ponderada. Se finaliza el epígrafe demostrando la equivalencia entre el método de las ponderaciones y el método basado en la distancia L_1 ponderada. El epígrafe quinto se dedica al desarrollo de técnicas interactivas. Se explican la técnica lineal ponderada, la técnica de *Tchebycheff* y la técnica del valor absoluto ponderado. Se exponen otras técnicas como simples variaciones de las tres técnicas fundamentales. El epígrafe sexto, se dedica a la explicación de técnicas interactivas generales para resolver el problema multiatributo, adaptando la técnica de las ponderaciones y la técnica de *Tchebycheff* para resolver este tipo de problemas. Se expone como técnica elemental general el algoritmo de *Marcotte* y *Soland*. Finalmente el epígrafe séptimo, se dedica a la explicación de las técnicas out-ranking, desarrollando fundamentalmente las metodologías de los algoritmos *ELECTRE* y *PROMETHÉE*.

2.2. Técnica clásica

Sea el problema multiobjetivo (O, V, X, f, Y, EP) . La técnica clásica consiste en construir una función de valor, V , definida sobre Y , con valores reales:

$$V: Y \rightarrow R$$

de tal forma que la solución del problema sea un resultado y^0 , tal que para todo $y \in Y$, se verifique: $V(y^0) \geq V(y)$.

Por tanto, cuando se conoce la función de valor, V , el problema multiobjetivo se reduce a resolver un problema de optimización uniobjetivo. Indicar, sin embargo, que la etapa de cálculo de las técnicas interactivas y de compromiso, se suele hacer efectiva, por regla general, no teniendo en cuenta una única función de valor, sino mediante una función de valor elegida de entre muchas posibles. En el correspondiente apartado del capítulo primero, se explicaron algunas pautas sobre cómo construir una función de valor.

2.3. Técnicas Satisfacientes y Técnicas de Compromiso

Para el problema multiobjetivo (O, V, X, f, Y, EP) , se denota por

$$Z = N(Y/EP) = \{y^0 \in Y \mid \text{no existe } y \in Y \text{ tal que } yPy^0\}.$$

Cuando se aplica la técnica clásica, Z suele tener un solo elemento, y en caso de tener más de un elemento, cualquiera de ellos es válido como solución para el decisor. Se supone que todos los elementos de Z no son válidos para el decisor. Explicar cómo se obtiene una solución válida para el decisor, por técnicas satisfacientes o técnicas de compromiso, es el objetivo de este apartado.

2.3.1. Técnicas Satisfacientes

Las técnicas satisfacientes, o satisfactorias, consisten en hallar un subconjunto Y_0 de Y , de tal forma que cualquier elemento de Y_0 sea una solución válida para el decisor. Se desarrollan distintas técnicas para construir conjuntos satisfacientes, comenzando el estudio suponiendo que la estructura de preferencias del decisor es la de Pareto.

Técnica P_1

En esta técnica se supone que $Y \subseteq R^n$ y que, respecto de cada componente, más es mejor. Suponiendo la condición anterior, el decisor estará satisfecho cuando cada uno de los objetivos supere un valor mínimo. Si $(r_1, r_2, \dots, r_j, \dots, r_n)$ son estos valores mínimos para los correspondientes objetivos, se define Z_0 como

$$Z_0 = \{y \in R^n \mid y_j \geq r_j, j = 1, \dots, n\}$$

El conjunto satisfaciente es $Y_0 = Z_0 \cap Y$. Cuando Y_0 es distinto del conjunto vacío, cualquier elemento de Y_0 es solución del problema multiobjetivo.

Si $Y_0 = \emptyset$, mediante alguna técnica interactiva se pueden modificar, de acuerdo con el decisor, los valores mínimos, r_j , hasta que el conjunto satisfaciente sea distinto del conjunto vacío, esto es, hasta que se consiga que en la etapa s -ésima se verifique que:

$$Y_0(r_1, r_2, \dots, r_j, \dots, r_n) \neq \emptyset.$$

Las técnicas interactivas se describirán en un apartado posterior.

Técnica P_2

Se supone que $Y \subseteq R^n$ y que, respecto de cada componente, más es mejor. El decisor fija sólo valores mínimos para $n-1$ de los objetivos. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que los objetivos para los que fija sus valores mínimos satisfacientes son todos menos el primero. Sean $(r_2, \dots, r_j, \dots, r_n)$ estos valores, y sea

$$Y_0(r_2, \dots, r_j, \dots, r_n) = \{y \in Y \mid y_j \geq r_j, j = 2, \dots, n\}.$$

Cuando $Y_0(r_2, \dots, r_j, \dots, r_n) \neq \emptyset$, se resuelve el problema clásico de programación matemática, que consiste en maximizar y_1 sujeto a $y \in Y_0(r_2, \dots, r_j, \dots, r_n)$. Si el valor

$$r_1 = \max\{y_1 | y \in Y_0(r_2, \dots, r_j, \dots, r_n)\},$$

es satisfactorio para el decisor, se admite, como solución del problema multiobjetivo, la solución del problema de programación matemática. En otro caso, se modifican por técnicas interactivas los valores mínimos $(r_2, \dots, r_j, \dots, r_n)$.

Técnica P_3

Es una técnica que utiliza las ideas de las técnicas P_1 y P_2 . Por tanto, se suponen las mismas condiciones comunes a estas técnicas. Su originalidad se encuentra en que, permite fijar los valores mínimos para un subconjunto cualquiera de los objetivos, quedando un problema multiobjetivo respecto de los restantes objetivos. Permite reducir el problema multiobjetivo, considerando menos objetivos.

La técnica P_3 , más que una técnica es un conjunto de ellas. Seleccionar de entre ellas la más adecuada, es una cuestión que se estudia en cada caso concreto.

Técnica General

Sólo supone que $Y \subseteq R^n$. El decisor fija n subconjuntos $Y_j \subseteq R$, y el conjunto satisfaciente es $Y_0 = Y \cap (Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n)$. Los principios de las técnicas P_1 , P_2 y P_3 se pueden aplicar de manera global, modificando de forma adecuada los conjuntos Y_j .

2.3.2. Técnicas de Compromiso

Como se señaló en el capítulo 1, el concepto de solución de compromiso surge de forma natural, cuando el conjunto satisfaciente $Y_0 = Z_0 \cap Y = \emptyset$, y el decisor no está interesado en modificar los niveles mínimos de los objetivos; sino que su interés es, hallar una solución tan próxima como sea posible a estos valores mínimos. En general, si $Y_0 = \emptyset$, y se dispone de una distancia apropiada D , que mide la proximidad entre cada par de elementos de R^n , la técnica de compromiso consiste en resolver el problema de programación matemática:

$$\min D(Z_0, Y) = \min\{D(z, y) | z \in Z_0, y \in Y\}$$

donde $Z_0 \subseteq R^n$, es el subconjunto que es satisfaciente para el decisor.

Por tanto, fijada una distancia D , queda definida con precisión la técnica de compromiso. Las distintas técnicas de compromiso varían con la distancia D seleccionada. Se exponen, a continuación, algunas de estas técnicas.

Técnica de Compromiso L_1 Ponderada

Se fundamenta en la utilización como distancia de la distancia L_1 ponderada:

$$D(z, y) = \sum_{j=1}^n \pi_j |z_j - y_j|$$

donde los π_j son no negativos. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que su suma es una constante C , pudiendo ser $C = 1$. Al vector $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_j, \dots, \pi_n)$, se le denomina *vector de pesos o ponderaciones*.

En no pocas situaciones, el conjunto satisfaciente Z_0 está formado por un solo elemento z^0 , que se suele denotar por y^* . Cuando sucede además que, para todas las componentes j , se verifica que $y_j^* > y_j$, para todo j y para todo $y \in Y$, la programación multiobjetivo se reduce a:

$$\begin{aligned} \min D(y^*, Y) &= \min_{y \in Y} \sum_{j=1}^n \pi_j |y_j^* - y_j| \\ \sum_{j=1}^n \pi_j |y_j^* - y_j| &= \sum_{j=1}^n \pi_j y_j^* - \sum_{j=1}^n \pi_j y_j \end{aligned}$$

problema que equivale a

$$\max_{y \in Y} \sum_{j=1}^n \pi_j y_j$$

Cuando EP es la preferencia de Pareto, $N(Y/P)$ son los puntos eficientes de Y , y la envoltura convexa de $N(Y/P)$, $EC(N(Y/P))$, no contiene ningún punto que domine, en el sentido de Pareto, a ningún punto eficiente; entonces al variar el vector de ponderaciones π , se hallan todas las soluciones eficientes del problema multiobjetivo. Se propone, por tanto, el siguiente método.

PROGRAMA L_1 Ponderada:

Al resolver los problemas

$$\max_{y \in Y} \sum_{j=1}^n \pi_j y_j$$

para los distintos valores de π , se obtiene $N(Y/P)$.

El resultado anterior siempre se cumple cuando Y es A^{\leq} -convexo ($A^{\leq} = \{\lambda \in R^n \mid \lambda_i \leq 0, i = 1, \dots, n\}$) y, por supuesto, cuando Y es convexo, ya que si Y es convexo, es convexo respecto de cualquier cono.

Por el contrario, si existe un $z \in EC(N(Y/P))$, tal que z domina estrictamente a un punto eficiente $y \in N(Y/P)$, este punto y no se puede obtener como solución de ninguno de los problemas anteriores.

Técnica de Compromiso L_q Ponderada

Se supone que $1 < q < \infty$. Esta técnica, se fundamenta en la utilización como distancia de la distancia L_q ponderada:

$$D(z, y) = \sum_{j=1}^n [\pi_j |z_j - y_j|^q]^{1/q}$$

donde los π_j son no negativos. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que su suma es una constante C , pudiendo ser $C = 1$. Al vector $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_j, \dots, \pi_n)$, se le denomina *vector de pesos o ponderaciones*.

Estas técnicas tienen la gran desventaja respecto de la técnica de la distancia L_1 , de que es mucho más complejo el cálculo para su resolución y, tienen también la desventaja, de que no se pueden transformar en un problema de máximo. Tienen el interés matemático de que las soluciones óptimas y^q , $1 < q < \infty$, forman una curva continua, cuando Y es un subconjunto convexo de R^n . En la práctica de la programación multiobjetivo, las distancias L_q se emplean muy poco.

Técnica de Compromiso L_∞ Ponderada

Esta técnica, se fundamenta en la utilización como distancia de la distancia L_∞ ponderada:

$$D_\infty(z, y) = \max_{1 \leq j \leq n} (\pi_j |z_j - y_j|)$$

donde los π_j son no negativos. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que su suma es una constante C , pudiendo ser $C = 1$. Al vector $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_j, \dots, \pi_n)$, se le denomina *vector de pesos o ponderaciones*.

El problema que se debe resolver es:

$$\min_{y \in Y} D_\infty(z, y) = \min_{y \in Y} \left(\max_{1 \leq j \leq n} (\pi_j |z_j - y_j|) \right)$$

problema que equivale al siguiente:

$$\begin{aligned} & \min t \\ \text{sujeto a: } & \pi_j |z_j - y_j| \leq t, \text{ para } j = 1, \dots, n, \text{ e } y \in Y \end{aligned}$$

en el caso general.

Cuando Z_0 tiene un solo elemento y^* , tal que para todo $y \in Y$, y para todo j , se verifica que $y_j^* > y_j$, el problema se convierte en:

$$\begin{aligned} & \min t \\ \text{sujeto a: } & \pi_j (y_j^* - y_j) \leq t, \text{ para } j = 1, \dots, n, \text{ e } y \in Y \end{aligned}$$

Todos los puntos eficientes de Pareto, $N(Y/P)$, se pueden hallar como soluciones de algún programa de compromiso respecto de la distancia L_∞ ponderada. Por tanto, la distancia L_∞ , también llamada de Tchebycheff, es suficiente para hallar todas las soluciones de Pareto. Cuando la solución del problema de programación matemática es única, la solución es eficiente. Si el problema tiene más de una solución, entre todas ellas existe al menos una que es eficiente.

Programación por Metas

Es una variante de las técnicas de la distancia L_1 ponderada, que permite ponderar con distintos pesos, según sean positivas o negativas, las diferencias entre las componentes de los puntos satisficentes y las componentes de los puntos solución. Son adecuadas en problemas de tipo fisiológico, donde la mejor solución para el sistema es un valor intermedio entre todos los posibles, aunque también son válidas en otros casos más generales. La exigencia de estas técnicas es, que el conjunto satisficente Z_0 está formado por un solo punto z .

El problema a resolver es:

$$\min_{y \in Y} D(z, y) = \min_{y \in Y} \left(\sum_{j=1}^n \max \left\{ \left(\pi_j^+ (z_j - y_j) \right), \left(\pi_j^- (y_j - z_j) \right) \right\} \right)$$

Llamando $d_j^+ = \max\{0, (z_j - y_j)\}$ y $d_j^- = \max\{0, (y_j - z_j)\}$, la programación de compromiso por metas, se puede plantear como el siguiente programa de programación matemática:

PROGRAMA Programación por Metas:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n \pi_j^+ d_j^+ + \sum_{j=1}^n \pi_j^- d_j^- \\ \text{sujeto a:} \quad & d_j^+ = \max\{0, (z_j - y_j)\} \quad \text{para } j = 1, \dots, n \\ & d_j^- = \max\{0, (y_j - z_j)\} \quad \text{para } j = 1, \dots, n \\ & y \in Y \end{aligned}$$

Si el decisor sabe fijar con precisión el valor satisficente z y las ponderaciones, la solución del problema multiobjetivo, se reduce a resolver el problema de programación matemática anterior.

2.4. Conceptos relativos a las Técnicas Interactivas

Se considera el problema multiobjetivo (O, V, X, f, Y, EP) . Como en el apartado previo, se denota por

$$Z = N(Y) = N(Y/EP) = \{y^0 \in Y \mid \text{no existe } y \in Y \text{ tal que } yPy^0\}.$$

Las técnicas interactivas consisten en reducir progresivamente los elementos eficientes mediante refinamientos de las estructuras de preferencia del decisor, hasta reducir Z a un conjunto Z_0 , tal que cualquiera de sus elementos es válido para el decisor.

Los métodos interactivos son útiles porque es difícil, casi imposible o muy costoso, obtener globalmente toda la información necesaria para determinar las preferencias del decisor en el espacio de resultados. En la aplicación de cualquier técnica interactiva, es prioritario obtener información parcial sobre las preferencias del decisor, para que el método de búsqueda de la mejor solución progrese hacia ella.

En la práctica, suele resultar ineficaz dedicar mucho tiempo y pensamiento en la búsqueda de preferencias parciales, debido a que pueden aparecer, al mismo tiempo, otros sucesos que resulten ser más importantes para el decisor. El incentivo para la búsqueda de nueva información sobre las preferencias del decisor, puede perder importancia rápidamente, hasta ser olvidado, cuando se logra una buena solución, incluso aunque no estén completamente especificadas las preferencias.

En la práctica, se pueden construir muchos métodos interactivos. De hecho, tantos como métodos de elicitación se puedan definir entre el analista y el decisor, aumentados por la combinación de los métodos de optimización, que pueda usar el analista durante las etapas del proceso de cálculo.

2.4.1. Punto ideal y distancias en la Programación Interactiva

Se considera que el decisor conoce, respecto del espacio de resultados, un punto ideal o utopía, que se designa por y^* . Cuando, en el espacio de alternativas, existe un punto $x^* \in X$, tal que $f(x^*) = y^*$, el problema está resuelto, siendo (x^*, y^*) la solución.

No obstante, en la mayoría de los problemas el punto ideal y^* , es inalcanzable, es decir, no pertenece al espacio de resultados. En este caso, se supone que se dispone de una familia de distancias D , definidas en el espacio de resultados ampliado con el punto ideal de tal forma que para todo $z \in N(Y)$, exista $d \in D$, tal que:

$$d(z, y^*) = \min_{y \in N(Y)} d(y, y^*).$$

El método interactivo, consiste en seleccionar distancias de la familia y hallar el punto eficiente asociado a cada distancia elegida. Cuando el decisor está satisfecho con uno de los puntos eficientes hallado, el proceso finaliza. Si no está satisfecho, se considera una nueva distancia, de tal forma que su punto eficiente asociado sea mejor para el decisor que el anterior. De entre todas las familias de distancias válidas para el problema, se debe elegir aquella que sea fácil de optimizar. La familia de distancias se elige en función del problema.

2.4.2. Optimización en el sentido de Pareto

Se supone que en cada objetivo, más es mejor. El caso de que en algún objetivo más sea peor, se reduce al anterior, considerando la función objetivo opuesta. Si se elige

como familia de distancias la L_1 ponderada, considerando $Y \subset R^n$, se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\min \sum_{j=1}^n \pi_j (y_j^* - y_j)$$

sujeto a : $y \in Y$,

$\pi_j \geq 0$, para $j = 1, \dots, n$, con al menos un $\pi_j > 0$.

Teniendo en cuenta:

$$\sum_{j=1}^n \pi_j (y_j^* - y_j) = \sum_{j=1}^n \pi_j y_j^* - \sum_{j=1}^n \pi_j y_j$$

y que $\sum_{j=1}^n \pi_j y_j^*$ es constante, el problema de minimización anterior, se reduce al problema de maximización:

$$\max \sum_{j=1}^n \pi_j y_j$$

sujeto a : $y \in Y$,

$\pi_j \geq 0$, para $j = 1, \dots, n$, con al menos un $\pi_j > 0$.

Como se ha visto en el primer capítulo, cuando todas las componentes del vector de pesos son estrictamente positivas, el punto que maximiza el problema anterior es eficiente o no dominado, mientras que si alguna de sus componentes es nula, entre las soluciones del problema, se encuentra al menos una que es eficiente. Además, cuando la envoltura convexa del espacio de resultados no contiene en su interior, ningún punto eficiente, se verifica que para cualquier punto $y^1 \in N(Y)$, existe un vector de pesos π^* , con todas sus componentes no negativas y alguna componente estrictamente mayor que cero, tal que:

$$\sum_{j=1}^n \pi_j^* y_j^1 \geq \sum_{j=1}^n \pi_j^* y_j , \text{ para todo } y \in N(Y).$$

En este caso la distancia L_1 ponderada basta para hallar todos los puntos eficientes del problema. Como es la distancia más sencilla, se utilizará siempre que se cumpla la hipótesis señalada.

2.4.3. Distancia L_∞ Ponderada o de Tchebycheff Ponderada

Cuando en cada objetivo, más es mejor (o para algún objetivo más es peor), y existe algún punto eficiente que pertenece al interior de la envoltura convexa del espacio de resultados, dicho punto eficiente no se puede hallar con la técnica de la

distancia L_1 ponderada. En este caso, se debe utilizar la distancia L_∞ ponderada, considerándose el siguiente problema de optimización:

$$\min_{y \in Y} \left(\max_{1 \leq j \leq n} (\pi_j (y_j^* - y_j)) \right)$$

llamando $a_j = (1/\pi_j)$, para cada j , el problema anterior se transforma en:

$$\begin{aligned} & \min t \\ \text{sujeto a: } & y_j^* - y_j \leq a_j t, \text{ para } j = 1, \dots, n, \text{ y } a_j > 0 \text{ para todo } j, \\ & y \in Y. \end{aligned}$$

En el espacio de alternativas, el problema admite la siguiente formulación:

$$\begin{aligned} & \min t \\ \text{sujeto a: } & y_j^* - f_j(x) \leq a_j t, \text{ para } j = 1, \dots, n, \text{ y } a_j > 0 \text{ para todo } j, \\ & x \in X. \end{aligned}$$

Con la formulación anterior, se hallan todas las soluciones eficientes. Cuando la solución del problema es única, dicha solución es no dominada; en otro caso, entre las soluciones del problema, se encuentra al menos una solución eficiente. Este método debe ser el utilizado cuando, no sea válida la técnica de la distancia L_1 ponderada, y se considere la hipótesis de Pareto (más es mejor). En ambos métodos se supone, sin pérdida de generalidad, que $y_j^* > y_j$, para $j = 1, \dots, n$, para todo $y \in Y$.

2.4.4. Distancia del Valor Absoluto Ponderado

Sea y^* , el punto ideal. Se supone que para cada objetivo j , se verifica que existen dos puntos pertenecientes al espacio de resultados, y^1 e y^2 , tales que $y_j^1 \leq y_j^* \leq y_j^2$. En el caso de que $y^* \in Y$, y^* es la solución al problema. En otro caso, se dice que $y^2 \succ y^1$ (y^2 es mejor que y^1), cuando, para $j = 1, \dots, n$, se verifica que $|y_j^* - y_j^2| \leq |y_j^* - y_j^1|$.

En este supuesto, cuando se utiliza la distancia del valor absoluto ponderado, se hallan todas las soluciones eficientes del problema. Para ello, se deben resolver los problemas de optimización cuya formulación es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^n (w_j^+ d_j^+ + w_j^- d_j^-) \\ \text{sujeto a: } & f_j(x) + d_j^+ - d_j^- = y_j^* \text{ para } j = 1, \dots, n \\ & d_j^+ \geq 0, d_j^- \geq 0, \text{ para } j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$x \in X.$$

con todos los pesos $(w_j^+, w_j^-, j = 1, \dots, n)$ mayores o iguales que cero.

Esta formulación del problema, se denomina en la literatura programación por metas. Es claro que, el problema de la distancia de Tchebycheff ponderada, se puede formalizar también por el modelo de la programación por metas. Dicha formulación es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^n w_j^+ d_j^+ \\ \text{sujeto a: } & f_j(x) + d_j^+ = y_j^* \quad \text{para } j = 1, \dots, n \\ & d_j^+ \geq 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, n \\ & x \in X. \end{aligned}$$

con todos los pesos $(w_j^+, j = 1, \dots, n)$ mayores o iguales que cero.

Es claro que para cada solución del problema:

$$\begin{aligned} & \min t \\ \text{sujeto a: } & y_j^* - f_j(x) \leq a_j t, \quad \text{para } j = 1, \dots, n, \text{ y } a_j > 0 \text{ para todo } j, \\ & x \in X. \end{aligned}$$

existe un vector de pesos π , tal que la solución del problema anterior es también solución del siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^n \pi_j^+ d_j^+ \\ \text{sujeto a: } & f_j(x) + d_j^+ = y_j^* \quad \text{para } j = 1, \dots, n \\ & d_j^+ \geq 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, n \\ & x \in X. \end{aligned}$$

con todos los pesos $(\pi_j^+, j = 1, \dots, n)$ mayores o iguales que cero.

Puesto que cuando se aplica la distancia de Tchebycheff ponderada, es $f_j(x) < y_j^*$, para $j = 1, \dots, n$, los valores de d_j^- , utilizados en la programación por metas son iguales a cero. Por tanto, la programación considerando la distancia de Tchebycheff ponderada, se puede considerar como un caso particular de la programación por metas, aunque son más fáciles de resolver los problemas de optimización por la primera técnica que utilizando la programación por metas. Lo mismo se puede decir, de los problemas que se resuelven mediante la distancia L_1 ponderada.

2.4.5. Equivalencia entre la Distancia L_1 ponderada y el Método de las Ponderaciones

El problema multiobjetivo considerado es:

$$\max_{x \in X} \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

Sea un punto y^* , tal que $f_j(x) < y_j^*$, para $j = 1, \dots, n$. Para unos pesos $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$, la distancia L_1 ponderada, se define por la fórmula:

$$D_\pi(y^*, f(x)) = \sum_{j=1}^n \pi_j (y_j^* - f_j(x)).$$

Son soluciones del problema aquellos puntos de X que minimizan la distancia; es decir, x^0 es un punto solución, si y sólo sí, se verifica:

$$D_\pi(y^*, f(x)) = \sum_{j=1}^n \pi_j (y_j^* - f_j(x)) \geq D_\pi(y^*, f(x^0)) \text{ para todo } x \in X.$$

De la fórmula anterior, se deduce la siguiente:

$$\sum_{j=1}^n \pi_j f_j(x) \leq \sum_{j=1}^n \pi_j f_j(x^0) \text{ para todo } x \in X.$$

Por tanto, minimizar la distancia anterior, equivale a maximizar, en X , la función lineal ponderada:

$$L(\pi, f(x)) = \sum_{j=1}^n \pi_j f_j(x)$$

con $\pi_j \geq 0$, para $j = 1, \dots, n$, y $\sum_{j=1}^n \pi_j = C$, siendo C una constante arbitraria.

Como se señaló anteriormente, la técnica de las ponderaciones halla todas las soluciones eficientes, cuando la envoltura convexa del espacio de resultados Y no contiene en su interior ningún punto eficiente; esto es, para todo punto eficiente $\bar{y} \in Y$, no existe un $y \in EC(Y)$ tal que $y_j > \bar{y}_j$, para $j = 1, \dots, n$.

2.5. Técnicas Interactivas

Ya se ha señalado que las técnicas interactivas son tan numerosas como las formas de intercambiar informaciones entre el analista y el decisor, aumentadas con los métodos de optimización matemática que se pueden utilizar en la resolución de los problemas de programación. Por ello, resulta imposible explicarlas todas. No obstante, todas ellas están relacionadas con al menos una de las tres técnicas interactivas: La técnica de las ponderaciones, La técnica L_∞ ponderada y la programación por metas ponderada. Estas tres técnicas se describen algorítmicamente en el trabajo. Otras técnicas, serán relacionadas con alguna de las tres mencionadas.

2.5.1. Técnica Interactiva por el Método de las Ponderaciones

El problema multiobjetivo considerado es:

$$\max_{x \in X} \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

La técnica de las ponderaciones transforma el problema anterior en el siguiente:

$$\max L(\pi, f(x)) = \max \sum_{j=1}^n \pi_j f_j(x)$$

donde $\pi_j \geq 0$, para $j = 1, \dots, n$, son coeficientes que pueden variar.

Cuando para resolver este problema se utilizan técnicas interactivas, se reducen en cada iteración, bien el espacio de pesos, o bien el conjunto de soluciones eficientes; es decir, se tendrán los dos planteamientos siguientes:

Planteamiento 1

Sea

$$W = \left\{ \pi \left| \pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n), \pi_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n \pi_j = C \right. \right\}$$

el conjunto inicial de pesos. En cada iteración, se reduce el conjunto W . Se para, cuando se llega a un conjunto W^* , tal que, con cualquier ponderación seleccionada de W^* , la solución del problema es admitida por el decisor. La reducción se realizará de forma progresiva:

$$W \supset W_1 \supset W_2 \dots \supset W^*.$$

Planteamiento 2

Consiste en reducir progresivamente el conjunto de puntos eficientes E , hasta llegar a un conjunto E^* , tal que todos los elementos de E^* , se pueden considerar como soluciones admitidas o válidas para el decisor. Dependiendo de la forma de reducir el conjunto de soluciones eficientes, se tienen distintos métodos interactivos.

ALGORITMOS

El primer algoritmo que se desarrolla, consta de dos fases esenciales. En la fase de cálculo, se resuelve el problema lineal uniobjetivo ponderado:

$$\max L(\pi, f(x)) = \max \sum_{j=1}^n \pi_j f_j(x).$$

En la fase interactiva, se reduce el espacio de pesos, y se selecciona un nuevo vector de pesos, para pasar de nuevo a la fase de cálculo.

Algoritmo del Método de las Ponderaciones

Paso 0. Colocar $h = 0$, $I_j(h) = 0$, $S_j(h) = C$, para $j = 1, \dots, n$.

Paso 1. (Fase de cálculo). Sea:

$$W(h) = \left\{ \pi \left| \pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n), \pi_j \in [I_j(h), S_j(h)], j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n \pi_j = C \right. \right\}$$

el espacio de ponderaciones. Elegir $w(h) \in W(h)$. Si $h = 0$, se elige $\pi_j(h) = 1$, para todo $j = 1, \dots, n$. Se resuelve el problema:

$$\max_{x \in X} L(\pi, f(x)) = \max_{x \in X} \sum_{j=1}^n \pi_j f_j(x).$$

Sea $\bar{x}(h)$ la solución obtenida e \bar{y} el resultado obtenido.

Paso 2. (Fase interactiva con el decisor). Se presenta al decisor el resultado \bar{y} , para que clasifique los resultados, obteniendo:

$$RSS = \{ j \mid j \in \{1, \dots, n\} \text{ e } \bar{y}_j \text{ es suprasatisfactorio} \}$$

$$RIS = \{ j \mid j \in \{1, \dots, n\} \text{ e } \bar{y}_j \text{ es infrasatisfactorio} \}$$

$$RID = \{ j \mid j \in \{1, \dots, n\} \text{ e } \bar{y}_j \text{ es indiferente} \}$$

Si $RIS = \emptyset$, entonces se finaliza el proceso, con \bar{y}_j como solución del problema. Si $RSS = \emptyset$, el decisor aspira a más de lo que es posible conseguir, y tiene que rebajar sus aspiraciones hasta que haya algún objetivo suprasatisfactorio. En caso contrario, ir al paso 3.

Paso 3. (Reducción del espacio de ponderaciones). Se considera:

$$W(h+1)$$

$$= \left\{ \pi \left| \pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n), \pi_j \in [I_j(h+1), S_j(h+1)], j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n \pi_j = C \right. \right\}$$

donde, si $j \in RSS$, se coloca

$$I_j(h+1) = I_j(h), \quad S_j(h+1) = w_j(h),$$

si $j \in RIS$, se coloca

$$I_j(h+1) = w_j(h), \quad S_j(h+1) = S_j(h),$$

si $j \in RID$, se coloca

$$I_j(h+1) = I_j(h), \quad S_j(h+1) = S_j(h).$$

Finalmente se pone $h = h + 1$ y se vuelve al paso 1.

La reducción del espacio de pesos, garantiza la convergencia del método a un único elemento del espacio de pesos, y por tanto, a la solución del problema.

2.5.2. Método de la Suma de Pesos de Steuer

En este método, como en el anterior, se considera como funciones objetivo las lineales ponderadas, reduciendo el espacio de pesos en cada interacción, de acuerdo con el decisor. En la fase de cálculo, el método genera y resuelve, un gran número de problemas del tipo:

$$\max_{x \in X} L(\pi, f(x)) = \max_{x \in X} \sum_{j=1}^n \pi_j f_j(x).$$

para distintas ponderaciones, elegidas del espacio de pesos.

El espacio, $W(h)$, que cambia en cada iteración h es:

$$W(h) = \left\{ \pi \mid \pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n), \pi_j \in [I_j(h), S_j(h)], j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n \pi_j = C \right\}.$$

El algoritmo es similar al precedente, salvo que en la fase de cálculo se resuelven varios problemas. Se fijan las siguientes cantidades: It = número de iteraciones, P = número de soluciones que se presentan al decisor en cada iteración, Q = número de pesos que se generan en cada iteración, P^* = número de problemas que se resuelven en cada iteración ($P^* > P$), r = un número positivo que se utiliza para reducir el espacio en el que se pueden elegir las ponderaciones.

Algoritmo de Steuer

Paso 0. Colocar $h = 0$, $I_j(h) = 0$, $S_j(h) = C$, para $j = 1, \dots, n$.

$$W(h) = \left\{ \pi \mid \pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n), \pi_j \in [I_j(h), S_j(h)], j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n \pi_j = C \right\}.$$

Se generan aleatoriamente Q vectores de pesos, y de ellos se seleccionan los P^* puntos más diferentes.

Paso 1. (Fase de cálculo). Se resuelven los problemas:

$$\max_{x \in X} L(\pi^s(h), f(x)) = \max_{x \in X} \sum_{j=1}^n \pi_j^s(h) f_j(x) \quad \text{para } s = 1, 2, \dots, P^*.$$

Paso 2 (Fase interactiva). Presentar al decisor las P soluciones que son más diferentes de los P^* problemas que se han resuelto en el paso 1, $(\bar{x}_s(h), \bar{y}_s(h))$, para $s = 1, 2, \dots, P^*$. Si entre estas soluciones existe alguna que es satisfactoria para el decisor, se elige dicha solución como solución del problema; en otro caso, si $h = It$, se para el proceso y se toma como solución la mejor de entre las presentadas al decisor hasta ese momento, sea $(\bar{x}(h), \bar{y}(h))$ dicha solución, obtenida utilizando el vector de pesos $\pi(h)$; mientras que si $h < It$, se va al paso 3.

Paso 3. Reducir el espacio de pesos aplicando los siguientes criterios:

Si $\pi_j(h) - \left(\frac{1}{2}\right)r^h \leq 0$ colocar $I_j(h+1) = 0, S_j(h+1) = r^h$.

Si $\pi_j(h) + \left(\frac{1}{2}\right)r^h \geq 1$ colocar $I_j(h+1) = 1 - r^h, S_j(h+1) = 1$.

En otro caso, colocar $I_j(h+1) = \pi_j(h) - \left(\frac{1}{2}\right)r^h, S_j(h+1) = \pi_j(h) + \left(\frac{1}{2}\right)r^h$.

Definir el nuevo espacio de pesos como:

$$W(h+1) =$$

$$\left\{ \pi \left| \pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n), \pi_j \in [I_j(h+1), S_j(h+1)], j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n \pi_j = C \right. \right\}.$$

Colocar $h = h + 1$ y volver al paso 1.

2.5.3. Método de la Zionts – Wallenius (Z–W)

El problema que se resuelve con este método, es el problema lineal multiobjetivo:

$$\max_{x \in X} \{C^1(x), C^2(x), \dots, C^n(x)\}$$

donde $X = \{x | Ax \leq d, x \geq 0\}$.

Como las funciones son lineales y el conjunto X es convexo, el método de las ponderaciones es válido para hallar todos los puntos extremos eficientes. Por tanto, el decisor debe encontrar un vector de pesos π^* que sea el verdadero valor para construir la función objetivo. El método es similar al de las ponderaciones y sólo se describe lo que tiene de diferente. La fase de cálculo es similar a la misma fase del método de las ponderaciones, y se concretiza en el paso 1 de dicha técnica.

Sea C_0 la matriz de costes reducidos correspondiente a la solución del problema del simplex uniobjetivo resuelto, y J_0 el conjunto de índices de las variables no básicas asociadas con la solución del problema lineal.

Las variables no básicas se clasifican en *eficientes* y *no eficientes*. Sea $i \in J_0$. La variable i es eficiente cuando el problema lineal:

$$\max \sum_{j=1}^n \pi_j C_{0j}^i$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n \pi_j C_{0j}^k \leq 0 \quad \text{para todo } k \neq i, k \in J_0,$$

$$\pi_j \geq 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, n.$$

tiene solución estrictamente positiva; en otro caso, la variable no es eficiente.

Clasificadas las variables no básicas en eficientes y no eficientes, se analizan los costes reducidos de las variables eficientes. Sea i el índice de una variable eficiente. Las componentes del vector de costos reducidos C_{0j}^i correspondiente a esta variable, se denominan tasas de intercambio, representando el aumento de cada objetivo cuando se incrementa la variable x_i en una unidad. En la fase interactiva, el decisor, en función de las tasas de intercambio, clasifica las variables eficientes en aceptables, inaceptables e indiferentes; que es una clasificación similar a la de suprasatisfactoria, infrasatisfactoria e indiferente.

La reducción del espacio de pesos, en cada ciclo del algoritmo, se efectúa en función de esta clasificación; añadiendo, en cada ciclo del algoritmo, las siguientes restricciones al espacio de ponderaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \pi_j C_{0j}^s &\geq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \text{si } s \text{ es aceptable,} \\ \sum_{j=1}^n \pi_j C_{0j}^s &\leq -\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \text{si } s \text{ es inaceptable,} \\ \sum_{j=1}^n \pi_j C_{0j}^s &= 0, \quad \text{si } s \text{ es indiferente.} \end{aligned}$$

Por tanto, el algoritmo sólo cambia en la reducción del espacio de pesos.

2.5.4. Algoritmo de Geoffrion-Dyer-Feinberg (GDF)

El método GDF es una técnica para resolver el problema multiobjetivo:

$$\max_{x \in X} \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

Se supone que cada decisor tiene una función de valor $U(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, que es cóncava en el espacio Y de resultados. Si, además, las funciones f_j son cóncavas, la función de valor de cada decisor sería lineal; es decir:

$$U(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = \sum_{j=1}^n \pi_j f_j(x).$$

La técnica utiliza el algoritmo de Frank-Wolfe, para encontrar una dirección de búsqueda óptima. Se utiliza este algoritmo debido a su sencillez y rápida convergencia.

Algoritmo de Frank-Wolfe

(Se supone conocida la función $U(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$).

Paso 0. Colocar $h = 0$. Elegir un punto $x(h) \in X$.

Paso 1. Determinar la dirección de búsqueda $d(h) = y(h) - x(h)$, donde $y(h)$ es una solución del problema:

$$\max\{g^t y \mid y \in X\}$$

donde g es el gradiente de $U(f_1(x(h)), f_2(x(h)), \dots, f_n(x(h)))$.

Paso 2. Determinar el valor $t(h)$ que resuelve el problema:

$$\max_{0 \leq t \leq 1} U(f_1(x(h) + t d(h)), f_2(x(h) + t d(h)), \dots, f_n(x(h) + t d(h))).$$

Si

$$U(f_1(x(h)), f_2(x(h)), \dots, f_n(x(h))) \geq U(f_1(x(h) + t d(h)), f_2(x(h) + t d(h)), \dots, f_n(x(h) + t d(h)))$$

se para, obteniendo como solución $x(h)$; en otro caso, se coloca

$$x(h+1) = x(h) + t(h) d(h),$$

se coloca $h = h + 1$, y se vuelve al paso 1.

En programación multiobjetivo, se presupone que la función de valor es desconocida. En tal caso se considera:

$$\nabla(U(f(x(h)))) = \sum_{j=1}^n \frac{\delta U(f(x(h)))}{\delta f_j} \nabla(f_j(x(h)))$$

El término $\frac{\delta U}{\delta f_j}$, se llama valor marginal con respecto a f_j . Este término, en la economía tradicional, se considera que es imposible de evaluar. No obstante, basta con usar la razón marginal de sustitución (*RMS*), en vez del valor marginal, para el

correspondiente objetivo de la programación múltiple. Esto se sintetiza en el siguiente algoritmo GDF.

Algoritmo de GDF

Paso 0. Colocar $h = 0$. Elegir un punto $x(h) \in X$.

Paso 1. Se pide al decisor que evalúe $\frac{\delta U}{\delta f_j}$ por un peso w_j , para $j = 1, \dots, n$.

Paso 2. Sea

$$G(x(h)) = \sum_{j=1}^n w_j \nabla(f_j(x(h)))$$

Resolver el problema:

$$\max \{G(x(h))^t y \mid y \in X\}$$

Si $y(h)$ es la solución del problema anterior, calcular $d(h) = y(h) - x(h)$, e ir al paso 3.

Paso 3. Sean $z(k)$, $k = 1, \dots, P$, donde P es un parámetro, y

$$z(k) = x(h) + d(h) \left(\frac{k}{P}\right)$$

Evaluar $f(x)$ en los puntos $z(k)$ que pertenezcan al conjunto X , y presentar los resultados al decisor para que elija el mejor. Si el mejor de todos es peor que $f(x(h))$, parar tomando como solución del problema $f(x(h))$. En otro caso, sea $z(k_0)$ la solución mejor elegida por el decisor. Poner, $x(h+1) = z(k_0)$, e ir al paso 4.

Paso 4. Colocar $h = h + 1$, y volver al paso 1.

2.5.5. Técnica de la Distancia L_∞ Ponderada

Sea el problema multiobjetivo:

$$\max_{x \in X} \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$$

Sea un punto y^* , tal que para, todo $x \in X$, y para todo $j = 1, \dots, n$, se verifique $y_j^* > f_j(x)$. Para unas ponderaciones no negativas $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_j, \dots, \pi_n)$, la distancia L_∞ ponderada se define por la fórmula:

$$D_\infty^\pi(y^*, f(x)) = \max_{1 \leq j \leq n} \{\pi_j (y_j^* - f_j(x))\},$$

para todo $x \in X$.

La solución del problema está formada por aquellos puntos x_0 tales que:

$$D_{\infty}^{\pi}(y^*, f(x_0)) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \pi_j (y_j^* - f_j(x)) \right\},$$

para todo $x \in X$. La expresión anterior es equivalente a la siguiente:

$$D_{\infty}^{\pi}(y^*, f(x_0)) = \min_{x \in X} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \pi_j (y_j^* - f_j(x)) \right\} \right).$$

Resolver el problema previo equivale a hallar la solución del siguiente:

$$\begin{aligned} & \min t \\ \text{sujeto a:} \quad & \pi_j (y_j^* - f_j(x)) \leq t, \quad \text{para } j = 1, \dots, n, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Si \bar{t} , \bar{x} e $\bar{y} = f(\bar{x})$ son las soluciones del problema anterior, entonces se verifica:

$$\frac{y_j^* - f_j(\bar{x})}{\bar{a}_j} = \bar{t}, \quad \text{para } j = 1, \dots, n,$$

donde

$$\bar{a}_j = \frac{y_j^* - f_j(\bar{x})}{\bar{t}}, \quad \text{para } j = 1, \dots, n.$$

Por esta razón, la técnica se llama *técnica de las semirrectas*. Si se toma $\pi_j = (1/\bar{a}_j)$, se comprueba que los pesos y los coeficientes de las semirrectas, son inversos.

La fase de cálculo de esta técnica consiste en resolver el problema:

$$\begin{aligned} & \min t \\ \text{sujeto a:} \quad & y_j^* - f_j(x) \leq a_j t, \quad \text{para } j = 1, \dots, n, \quad x \in X, \quad t \in R, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Inicialmente las pendientes (a_1, a_2, \dots, a_n) pueden ser valores positivos cualesquiera. En pasos sucesivos se restringen los intervalos en los que se pueden seleccionar dichos coeficientes. Se supone que el punto ideal no es una solución factible, pues si lo fuera, dicho punto ideal sería la solución del problema multiobjetivo y no sería necesario aplicar ningún algoritmo adicional.

Algoritmo de las semirrectas

Paso 0. Colocar $h = 0$. Para $j = 1, \dots, n$, elegir $y_j^* > \max_{x \in X} f_j(x)$. Poner $a_j(h) = 1$, $l_j(h) = 0$ y $S_j(h) = n$, para $j = 1, \dots, n$; e ir al paso 1.

Paso 1. (Fase de cálculo). Resolver el problema:

$$\begin{aligned} & \min t \\ \text{sujeto a:} \quad & y_j^* - f_j(x) \leq a_j(h)t, \quad \text{para } j = 1, \dots, n, \quad x \in X, \quad t \in R, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Paso 2. (Fase de interacción).

Sean $x(h)$, $y(h) = f(x(h))$ los valores de la solución del problema planteado y resuelto en el paso 1. Si el problema anterior tuviera más de una solución, se toma como verdadera solución una solución eficiente. Se presentan al decisor los valores $f(x(h))$ de los objetivos, y se le pide que clasifique dichos valores en suprasatisfactorios, infrasatisfactorios e indiferentes. Sean $SP(h)$, $IP(h)$ e $ID(h)$, los subíndices de los objetivos correspondientes a los tres conjuntos de objetivos considerados anteriormente. Si $IP(h)=\emptyset$, parar; la solución considerada es óptima para el decisor. Si $SP(h)=\emptyset$, el decisor tiene unas aspiraciones más elevadas que las que se pueden conseguir y debe rebajarlas hasta que el conjunto $SP(h)$ sea distinto del vacío. En este caso, ir al paso 3.

Paso 3. Reducir el espacio de pendientes de las semirrectas siguiendo el siguiente procedimiento:

Si $j \in SP(h)$, colocar

$$I_j(h+1) = a_j(h), \quad S_j(h+1) = S_j(h).$$

Si $j \in IP(h)$, colocar

$$I_j(h+1) = I_j(h), \quad S_j(h+1) = a_j(h).$$

Si $j \in ID(h)$, colocar

$$I_j(h+1) = I_j(h), \quad S_j(h+1) = S_j(h).$$

Colocar $h = h + 1$, e ir al paso 4.

Paso 4. Para cada $j = 1, \dots, n$, elegir $a_j(h) \in [I_j(h), S_j(h)]$, con $a_j(h) > 0$, tal que la suma de las n pendientes de las semirrectas sumen n . Volver al paso 1.

2.5.6. Técnica STEM

STEM fue propuesta por Benayoun, Montgolfier, Tergny y Laritchev en el año 1971, para resolver un problema lineal multiobjetivo por una técnica interactiva que utiliza la distancia L_∞ ponderada. Por tanto, se considera el problema:

$$\max_{x \in X} \{C^1(x), C^2(x), \dots, C^n(x)\}$$

donde $X = \{x \mid Ax \leq d, x \geq 0\}$.

La técnica STEM calcula, en primer lugar, el punto ideal $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$, donde y_j^* es la solución del problema lineal uniobjetivo j -ésimo, $j = 1, \dots, n$,

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^k C_{ji} x_i$$

Sean $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, las soluciones a los n problemas uniobjetivo previos. Denotando por $z_{js} = f_j(x_s^*)$, se construye la matriz de pagos $Z = \{z_{js}\}$, $j = 1, \dots, n$,

$s = 1, \dots, n$. Los valores $(z_{11}, z_{22}, \dots, z_{nn})$ coinciden con el vector de valores ideales $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Con las notaciones previas, se expone el algoritmo STEM.

Algoritmo STEM

Paso 0. Colocar $h = 0$, $X(h) = X$ y $J(h) = \emptyset$.

Paso 1. Calcular la solución ideal $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, y el punto ideal $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$. Si esta solución es factible, se para; pues es la solución del problema lineal multiobjetivo propuesto. Si esta solución no es factible, ir al paso 2.

Paso 2. Para todo $j \notin J(h) = \emptyset$, calcular

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{y_j^* - m_j}{y_j^*} \left(\sum_{i=1}^k C_{ji}^2 \right)^{-1/2} & \text{cuando } y_j^* > 0 \\ \frac{m_j - y_j^*}{m_j} \left(\sum_{i=1}^k C_{ji}^2 \right)^{-1/2} & \text{cuando } y_j^* < 0 \end{cases}$$

siendo m_j el mínimo valor en la j -ésima columna de la matriz de pagos.

El primer término pretende dar mayor peso a aquellos objetivos que se desvíen más de la solución óptima. El segundo término normaliza los coeficientes de los objetivos según la norma euclídea.

Paso 3. Para todo $j = 1, \dots, n$, calcular las ponderaciones $w_j(h)$, siendo

$$w_j(h) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } j \in J(h) \\ \frac{\pi_j}{\sum_{s=1, s \notin J(h)}^n \pi_s} & \text{cuando } j \notin J(h) \end{cases}$$

Paso 4. (Fase de cálculo). Utilizando la métrica de Tchebycheff, o L_∞ ponderada, se plantea y resuelve el problema:

$$\begin{aligned} & \min t \\ \text{sujeto a:} \quad & w_j(h) (y_j^* - C^j(x)) \leq t, \quad \text{para } j = 1, \dots, n, x \in X(h), t \in R, t \geq 0. \end{aligned}$$

Se denota por $y(h) = f(x(h)) = C(x(h))$ a la solución de este problema.

Paso 5. (Fase de interacción). Presentar al decisor la solución hallada en el paso anterior. Si dicha solución satisface sus deseos, se para con esta solución como solución del problema; en caso contrario, se pregunta al decisor cuáles de las componentes de la solución no son satisfactorias, y se le pide al decisor que indique los índices $J^*(h)$ de las componentes que son suprasatisfactorias, y que, por tanto, el decisor está dispuesto a rebajar su valor actual. También se le pide que indique las cantidades $\Delta(j)$, para

$j \in J^*(h)$, que está dispuesto a rebajar en estas funciones objetivo. Con esta información, se construye la nueva región de soluciones factibles:

$$X(h+1) = X(h) \cap \{x \mid C^j(x) \geq C^j(x(h)) - \Delta(j), \text{ para } j \in J^*(h), C^j(x) \geq C^j(x(h)), \text{ para } j \notin J^*(h)\}.$$

Colocar $J(h+1) = J(h) \cup J^*(h)$, $h = h+1$, y volver al paso 1.

2.5.7. Algoritmo de Steuer para la distancia L_∞ Ponderada

El algoritmo, similar al de la suma de pesos de Steuer, genera y resuelve en cada iteración h , un gran número de problemas del tipo:

$$\begin{aligned} & \min t \\ \text{sujeto a: } & a_j(h)t \geq y_j^* - f_j(x), \text{ para } j = 1, \dots, n, x \in X, t \in R, t \geq 0. \end{aligned}$$

De los problemas seleccionados, se presentan al decisor las soluciones de los P problemas que sean entre sí las más discrepantes. El decisor debe elegir la mejor solución de entre las P analizadas. Si $a_j(h)$, $j = 1, \dots, n$, son las pendientes correspondientes a la mejor solución; la reducción del espacio de pendientes, se realiza por el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} [I_j(h+1), S_j(h+1)] &= [0, r^h], \text{ cuando } a_j(h) - \left(\frac{1}{2}\right)r^h \leq 0, \\ [I_j(h+1), S_j(h+1)] &= [1 - r^h, 1], \text{ cuando } a_j(h) + \left(\frac{1}{2}\right)r^h \geq 1, \\ [I_j(h+1), S_j(h+1)] &= \left[a_j(h) - \left(\frac{1}{2}\right)r^h, a_j(h) + \left(\frac{1}{2}\right)r^h\right], \\ &\text{cuando } 0 < a_j(h) - \left(\frac{1}{2}\right)r^h \text{ y } 1 > a_j(h) + \left(\frac{1}{2}\right)r^h. \end{aligned}$$

El proceso termina después de un número fijo de iteraciones.

Algoritmo de Steuer

Paso 0. Colocar $h = 0$. Se fijan t = número máximo de iteraciones, Q = número de vectores de pendientes de las semirrectas que se deben obtener por simulación, P = número de soluciones de problemas que se presentan al decisor en cada iteración, para que elija el mejor, y r , $0 < r < 1$, una constante que se utiliza para ir reduciendo el espacio de selección de las pendientes de las semirrectas. Sea

$$W(h) = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \left| a_j > 0, j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n a_j = 1 \right. \right\}.$$

Paso 1. Generar aleatoriamente de $W(h)$, Q vectores que determinen las pendientes de las semirrectas (cada uno de los vectores de n componentes). Sea $P < P^* < Q$. De los Q vectores obtenidos por simulación, seleccionar los P^* más diferentes; que se denotarán por $a_s(h)$, $s = 1, \dots, P^*$. Ir al paso 2.

Paso 2. Resolver los P^* problemas:

$$\begin{aligned} & \min t \\ \text{sujeto a: } & a_j(h)t \geq y_j^* - f_j(x), \quad \text{para } j = 1, \dots, n, x \in X, t \in R, t \geq 0. \end{aligned}$$

Paso 3. Presentar al decisor las P soluciones de los problemas anteriores que sean más discrepantes, $(\bar{x}_q(h), \bar{y}_q(h))$, para $q = 1, 2, \dots, P$ para que el decisor elija la mejor. Si la solución elegida es satisfactoria para el decisor, se para; en otro caso, se va al paso 4.

Paso 4. Si $a_j(h)$, $j = 1, \dots, n$, son las pendientes correspondientes a la mejor solución, la reducción del espacio de pendientes se realiza por el siguiente procedimiento:

$$[I_j(h+1), S_j(h+1)] = [0, r^h], \quad \text{cuando } a_j(h) - \left(\frac{1}{2}\right)r^h \leq 0,$$

$$[I_j(h+1), S_j(h+1)] = [1 - r^h, 1], \quad \text{cuando } a_j(h) + \left(\frac{1}{2}\right)r^h \geq 1,$$

$$[I_j(h+1), S_j(h+1)] = \left[a_j(h) - \left(\frac{1}{2}\right)r^h, a_j(h) + \left(\frac{1}{2}\right)r^h \right],$$

$$\text{cuando } 0 < a_j(h) - \left(\frac{1}{2}\right)r^h \quad \text{y} \quad 1 > a_j(h) + \left(\frac{1}{2}\right)r^h.$$

Se coloca

$$W(h+1) = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \left| a_j > 0, a_j \in [I_j(h+1), S_j(h+1)], j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n a_j = 1 \right. \right\}.$$

Si $h = t$, se para; en otro caso, se coloca $h = h + 1$ y se vuelve al paso 1.

2.5.8. Algoritmo Interactivo por Metas (GOAL)

Los valores ideales, en la programación por metas, se corresponden con las metas que al decisor le gustaría alcanzar en cada uno de los objetivos. Se denotarán estas metas por las componentes del vector y^* . Estas metas pueden ser el valor utopía, para aquellos objetivos en que más es mejor; pero en otros objetivos, dichas metas son valores intermedios, como sucede en los objetivos de índole fisiológica. Propuestas las metas, una solución es mejor que otra cuando está más próxima a los valores de las

metas. Cuando la proximidad se mide por la distancia L_1 , el problema de programación multiobjetivo por metas, se plantea en los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{j=1}^n (\pi_j^+ d_j^+ + \pi_j^- d_j^-) \\
& \text{sujeto a: } f_j(x) + d_j^- - d_j^+ = y_j^* \quad \text{para } j = 1, \dots, n \\
& \quad d_j^+ \geq 0, \quad d_j^- \geq 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, n \\
& \quad \pi_j^+ \geq 0, \quad \pi_j^- \geq 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n \pi_j^+ = n, \quad \sum_{j=1}^n \pi_j^- = n, \\
& \quad x \in X.
\end{aligned}$$

Algoritmo de Programación por Metas

Paso 0. Colocar $h = 0$, $I_j^-(h) = I_j^+(h) = 0$, $S_j^-(h) = S_j^+(h) = n$ y

$$W(h) = \left\{ (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \left| \pi_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n \pi_j = n \right. \right\}.$$

Paso 1. Se pide al decisor que elija un π^+ y un π^- , como elementos de $W^+(h) = W(h)$, y de $W^-(h) = W(h)$, para plantear el problema multiobjetivo por metas.

Paso 2. Se resuelve el problema:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{j=1}^n (\pi_j^+ d_j^+ + \pi_j^- d_j^-) \\
& \text{sujeto a: } f_j(x) + d_j^- - d_j^+ = y_j^* \quad \text{para } j = 1, \dots, n \\
& \quad d_j^+ \geq 0, \quad d_j^- \geq 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, n \\
& \quad \pi_j^+ \geq 0, \quad \pi_j^- \geq 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n \pi_j^+ = n, \quad \sum_{j=1}^n \pi_j^- = n, \\
& \quad x \in X.
\end{aligned}$$

y se presenta la solución $(\bar{x}(h), \bar{y}(h))$ al decisor. Si el decisor está satisfecho con la solución hallada se para; en otro caso, se va al paso 3.

Paso 3. Se pide al decisor que clasifique los valores de los objetivos en la solución, en insatisfactorios $IS(h)$, suprasatisfactorios $SP(h)$ e indiferentes $ID(h)$.

Si $j \in IS(h)$, e $\bar{y}_j(h) < y_j^*$, entonces se establece:

$$I_j^-(h+1) = \pi_j^-(h), \quad I_j^+(h+1) = I_j^+(h), \quad S_j^-(h+1) = S_j^-(h), \quad S_j^+(h+1) = S_j^+(h),$$

por el contrario, si $\bar{y}_j(h) > y_j^*$, entonces se establece:

$$I_j^-(h+1) = I_j^-(h), I_j^+(h+1) = \pi_j^+(h), S_j^-(h+1) = S_j^-(h), S_j^+(h+1) = S_j^+(h).$$

Si $j \in SP(h)$, e $\bar{y}_j(h) < y_j^*$, entonces se establece:

$$I_j^-(h+1) = I_j^-(h), I_j^+(h+1) = I_j^+(h), S_j^-(h+1) = \pi_j^-(h), S_j^+(h+1) = S_j^+(h),$$

por el contrario, si $\bar{y}_j(h) > y_j^*$, entonces se establece:

$$I_j^-(h+1) = I_j^-(h), I_j^+(h+1) = I_j^+(h), S_j^-(h+1) = S_j^-(h), S_j^+(h+1) = \pi_j^+(h).$$

Si $j \in ID(h)$, entonces se establece:

$$I_j^-(h+1) = I_j^-(h), I_j^+(h+1) = I_j^+(h), S_j^-(h+1) = S_j^-(h), S_j^+(h+1) = S_j^+(h).$$

Se establece

$$\begin{aligned} & W^-(h+1) \\ &= \left\{ (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \left| \pi_j \geq 0, \quad \pi_j \in [I_j^-(h+1), S_j^-(h+1)], j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n \pi_j = n \right. \right\}, \\ & W^+(h+1) \\ &= \left\{ (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \left| \pi_j \geq 0, \quad \pi_j \in [I_j^+(h+1), S_j^+(h+1)], j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n \pi_j = n \right. \right\}. \end{aligned}$$

Se coloca $h = h + 1$ y se vuelve al paso 1.

2.6. Técnicas especiales de Programación Multiatributo

La programación multiatributo pretende resolver el problema de seleccionar el mejor objeto u opción, elegido de un conjunto finito. Cada opción se caracteriza por los valores de un número finito de variables, o atributos, que se miden sobre cada uno de los objetos. La palabra opción se debe entender en un sentido muy amplio; pudiendo ser, un objeto cualquiera (un coche, un piso, un ordenador, la elección de una situación, una inversión, etc.).

La programación multiatributo se define por un cuádruple (O, V, X, EP) , siendo O el conjunto de objetos, V las variables, características o atributos que se miden sobre los objetos de O , X es el espacio de alternativas, que se obtienen como la imagen de O mediante V , y EP es la estructura de preferencias del decisor.

Llamando $x_{ij} = V_j(o_i)$, se supone que cada $x_{ij} \in D_j$, para $j = 1, \dots, n$, siendo D_j un conjunto totalmente ordenado. En la metodología de Pareto, se supone que las opciones que tienen mayores valores en cada D_j son las mejores.

En los problemas prácticos, no se suele disponer de tantos datos. En dichos problemas, es difícil determinar con precisión los conjuntos D_j , así como medir el valor de cada variable en cada opción. Soslayar estas dificultades, planteando el problema en forma determinística, puede inducir a que la solución del problema no sea ningún objeto eficiente; y por ello, no suele haber inconsistencia en que el decisor elija como mejor objeto a uno que no sea eficiente. La aleatoriedad o difusidad bien entendida, puede ayudar en la modelización de los problemas reales multiatributo con información incompleta. No obstante, a nivel teórico, cuando se plantea el problema en forma determinística se admite la hipótesis de que la solución del problema debe ser eficiente.

2.6.1. Algoritmo General Interactivo

El algoritmo general interactivo busca la solución de un problema multiatributo aplicando el algoritmo de las ponderaciones y, cuando con esta técnica no se pueden hallar todas las soluciones eficientes, se aplica a continuación el método de las semirrectas, o de la métrica de Tchebycheff ponderada, métodos que ya fueron descritos en el epígrafe 2.5 sobre métodos interactivos en programación multiobjetivo.

Algoritmo de la Técnica de las Ponderaciones

Paso 0. Se comienza eliminando todos los objetos que no sean eficientes. Se coloca $h = 1$, y se va al paso 1.

Paso 1. Si $h = 1$, se eligen, para todo $j = 1, \dots, n$, $\pi_j^1 = 1$. Si $h > 1$, se elige por el decisor $\pi^h \in A_h$, donde

$$A_h = \left\{ (\pi_1^h, \pi_2^h, \dots, \pi_n^h) \left| \pi_j^h \geq 0, \pi_j^h \in [I_j(h), S_j(h)], j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n \pi_j^h = n \right. \right\}.$$

Paso 2. (Fase de cálculo). Para todo objeto eficiente o_i , calcular su valor:

$$VP(o_i) = \pi_1^h x_{i1} + \pi_2^h x_{i2} + \dots + \pi_n^h x_{in}.$$

Seleccionar el objeto o_i^h tal que maximice la función de valor $VP(o_i)$, de tal forma que o_i^h no haya sido seleccionado previamente.

Paso 3. (Fase interactiva con el decisor). Se presenta al decisor el objeto o_i^h , con sus características $(x_{i1}(h), x_{i2}(h), \dots, x_{in}(h))$. El decisor debe clasificar los índices de las características en tres conjuntos:

$$SP = \{ j \mid j \in \{1, \dots, n\} \text{ y } x_{ij}(h) \text{ es suprasatisfactorio para el decisor} \}$$

$$IP = \{ j \mid j \in \{1, \dots, n\} \text{ y } x_{ij}(h) \text{ es infrasatisfactorio para el decisor} \}$$

$$ID = \{ j \mid j \in \{1, \dots, n\} \text{ y } x_{ij}(h) \text{ es adecuado para el decisor} \}.$$

Si $IP = \emptyset$, la solución hallada es válida para el decisor y el proceso termina. Se finaliza con o_i^h como solución del problema. Si $SP = \emptyset$, el decisor aspira a más de lo que es posible conseguir, y debe disminuir sus aspiraciones, hasta que $SP \neq \emptyset$. Cuando $IP \neq \emptyset$ y $SP \neq \emptyset$, ir al paso 4.

Paso 4. (Cálculo del nuevo espacio de ponderaciones). Calcular:

$$\Lambda_{h+1} = \left\{ (\pi_1^{h+1}, \pi_2^{h+1}, \dots, \pi_n^{h+1}) \left| \pi_j^{h+1} \geq 0, \pi_j^{h+1} \in [I_j(h+1), S_j(h+1)], j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n \pi_j^{h+1} = n \right. \right\},$$

donde, si $j \in SP$, se coloca

$$I_j(h+1) = I_j(h), \quad S_j(h+1) = \pi_j^h,$$

si $j \in IP$, se coloca

$$I_j(h+1) = \pi_j^h, \quad S_j(h+1) = S_j(h),$$

si $j \in ID$, se coloca

$$I_j(h+1) = I_j(h), \quad S_j(h+1) = S_j(h).$$

Finalmente, colocar $h = h + 1$ y volver al paso 1.

Si con el algoritmo de las ponderaciones no se pueden hallar todos los puntos eficientes y, entre los hallados, no se encuentra una solución que satisfaga los deseos del decisor; se aplica el algoritmo interactivo de las semirrectas.

Algoritmo Interactivo de las Semirrectas

Paso 0. Se comienza eliminando todos los objetos que no sean eficientes. Se coloca $h = 1$, y se va al paso 1.

Paso 1. Si $h = 1$, se eligen, para todo $j = 1, \dots, n$, $a_j^1 = 1$. Si $h > 1$, se elige por el decisor $a^h \in \Lambda_h$, donde

$$\Lambda_h = \left\{ (a_1^h, a_2^h, \dots, a_n^h) \left| a_j^h \geq 0, a_j^h \in [I_j(h), S_j(h)], j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n a_j^h = n \right. \right\}.$$

Paso 2. (Fase de cálculo). Construir el punto ideal

$$x^* = (x_1^*, x_2^* \dots, x_n^*),$$

donde

$$x_j^* = \max\{V_j(o_i) | o_i \in O\},$$

siendo O el conjunto de puntos eficientes. Calcular

$$D(o_i) = \max \left\{ \frac{(x_j^{**} - V_j(o_i))}{a_j^h} \mid j = 1, \dots, n \right\},$$

donde $x_j^{**} = x_j^* + 1$.

Seleccionar un objeto o_i^h tal que minimice la función distancia $D(o_i)$, de tal forma que o_i^h no haya sido seleccionado previamente.

Paso 3. (Fase interactiva). Se presenta al decisor el objeto o_i^h , con sus características $(x_{i1}(h), x_{i2}(h), \dots, x_{in}(h))$. El decisor debe clasificar los índices de las características en tres conjuntos:

$$SP = \{j \mid j \in \{1, \dots, n\} \text{ y } x_{ij}(h) \text{ es suprasatisfactorio para el decisor}\}$$

$$IP = \{j \mid j \in \{1, \dots, n\} \text{ y } x_{ij}(h) \text{ es infrasatisfactorio para el decisor}\}$$

$$ID = \{j \mid j \in \{1, \dots, n\} \text{ y } x_{ij}(h) \text{ es adecuado para el decisor}\}.$$

Si $IP = \emptyset$, la solución hallada es válida para el decisor y el proceso termina. Se finaliza con o_i^h como solución del problema. Si $SP = \emptyset$, el decisor aspira a más de lo que es posible conseguir, y debe disminuir sus niveles de aspiración, hasta que $SP \neq \emptyset$. Cuando $IP \neq \emptyset$ y $SP \neq \emptyset$, ir al paso 4.

Paso 4. (Cálculo del nuevo espacio de pesos). Calcular:

$$\Lambda_{h+1} = \left\{ (a_1^{h+1}, a_2^{h+1}, \dots, a_n^{h+1}) \mid a_j^{h+1} \in [I_j(h+1), S_j(h+1)], j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n a_j^{h+1} = n \right\},$$

donde, si $j \in SP$, se coloca

$$I_j(h+1) = a_j^h, \quad S_j(h+1) = S_j(h),$$

si $j \in IP$, se coloca

$$I_j(h+1) = I_j(h), \quad S_j(h+1) = a_j^h,$$

si $j \in ID$, se coloca

$$I_j(h+1) = I_j(h), \quad S_j(h+1) = S_j(h).$$

Finalmente, colocar $h = h + 1$ y volver al paso 1.

2.6.1. Algoritmo de Marcotte y Soland

El fundamento del algoritmo de Marcotte y Soland consiste en la eliminación progresiva de soluciones eficientes hasta llegar a la solución válida para el decisor. El algoritmo de Marcotte y Soland, divide el conjunto inicial de puntos eficientes en varios subconjuntos, no necesariamente disjuntos, calculando el punto ideal para cada uno de estos subconjuntos y eligiendo también, de cada subconjunto, un punto eficiente. El decisor debe comparar el mejor punto eficiente de los hallados hasta ese momento. De los puntos eficientes calculados en cada etapa, se elige el mejor, para ser considerado en la siguiente etapa. Una vez elegido dicho punto, se procede de la siguiente forma.

Se eliminan todos los puntos eficientes examinados, que no hayan sido seleccionados por el decisor como el mejor. Se compara además el punto eficiente seleccionado como el mejor, con los puntos ideales de cada uno de los subconjuntos. Cuando el punto elegido como mejor es preferido al punto ideal de algún subconjunto, se eliminan de posteriores consideraciones todos los puntos de dicho subconjunto. El proceso continua hasta que se han eliminado todos los puntos, excepto uno.

Algoritmo de Marcotte y Soland

Paso 0. Se coloca $h = 1$, $K_1 = 1$, $O_1 = O$. Se elige un punto eficiente y^1 y se pone $z^1 = y^1$. Se va al paso 1.

Paso 1. Calcular el punto ideal para cada subconjunto $\{O_r^h\}$, $r = 1, \dots, K_1$. Los valores de estos puntos ideales se denotan por $\{w_r^h\}$. Si $h = 1$, ir al paso 7.

Paso 2. Seleccionar un punto eficiente $y_r^h \in O_r^h$, para cada $r = 1, \dots, K_h$.

Paso 3. Por interacción con el decisor, hallar el mejor punto eficiente z^{h+1} , seleccionando el mejor de entre $\{z^h, \{y_r^h\}, r = 1, \dots, K_h\}$.

Paso 4. Si los valores en z^{h+1} son mejores que w_r^h , eliminar para etapas posteriores a O_r^h . Si se han eliminado todos los subconjuntos, parar. La solución óptima es z^{h+1} . En otro caso, reordenar los índices de los subconjuntos no eliminados, $r = 1, \dots, K_{\bar{h}}$, e ir al paso 5.

Paso 5. Reindexar los índices de los conjuntos no borrados, $\{O_r^h\}$, $r = 1, \dots, K_{\bar{h}}$, después de suprimir de cada conjunto los puntos $\{z^h, \{y_r^h\}, r = 1, \dots, K_h\}$, distintos de z^{h+1} .

Paso 6. Para todo $r = 1, \dots, K_{\bar{h}}$, y para cada $j = 1, \dots, n$, construir los subconjuntos

$$O_{jr}^h = \{o \in O_r^h \mid V_j(o) > z_j^{h+1}\}.$$

Reindexar los índices de los conjuntos no vacíos, de la familia: $\{O_{jr}^h\}$, $j = 1, \dots, n$, $r = 1, \dots, K_{\bar{h}}$, obteniendo la nueva familia de subconjuntos: $\{O_r^{h+1}\}$, $r = 1, \dots, K_{h+1}$; colocar $h = h + 1$ y volver al paso 2.

Paso 7. Partir el conjunto de objetos en dos conjuntos:

$$O^1 = \{o \mid V(0) \leq w^1\} \text{ y } \bar{O}^1 = O \setminus O^1.$$

Volver al paso 2.

OBSERVACIÓN: Se puede realizar la partición de los conjuntos $\{O_r^h\}$, por otros procedimientos diferentes al utilizado en los pasos seis y siete. Si se supone que se ha llegado a la iteración h -ésima con los subconjuntos $\{O_r^h\}$, $r = 1, \dots, K_h$, y con la mejor solución z^{h+1} , entonces:

(i) Se divide cada O_r^h en dos subconjuntos, de tal forma que el cardinal de ambos subconjuntos se diferencie como máximo en una unidad.

(ii) Se modifica la división de los pasos 6 y 7 para obtener una partición por el procedimiento siguiente: Para partir el conjunto O_r^h , se elige la característica j -ésima, de tal forma que tenga cardinal máximo el conjunto $O_{jr}^h = \{o \in O_r^h \mid V_j(o) > z_j^{h+1}\}$. Se coloca $O_r^h = O_r^h \setminus O_{jr}^h$, y se sigue el mismo procedimiento con las características no examinadas.

2.7. Algoritmos basados en Técnicas de Ordenación (Out–Ranking)

Aunque las técnicas multiobjetivo son válidas para resolver los problemas multiatributo, no suelen ser las más apropiadas. La información adicional de que el número de objetos es finito y no muy grande, permite desarrollar otras técnicas específicas para resolver este tipo de problemas. Entre estas técnicas se analizan las de ordenación (out-ranking) que construyen órdenes parciales, cada vez más finos, hasta conseguir un orden parcial tal, que se puede admitir como solución del problema multiatributo cualquiera de los objetos no dominados respecto de dicho orden parcial. Se estudian las técnicas *Promethee* y *Electre*.

Los métodos de ordenación (out-ranking) consisten en definir una relación de orden sobre el conjunto de objetos mediante comparaciones entre pares, refinando progresivamente la relación de orden hasta obtener la solución. La forma general de estas técnicas se fundamenta en los siguientes pasos:

(I) Se define un orden parcial P de preferencia entre los objetos, comparando los elementos del conjunto de objetos O por pares. Se halla el conjunto de objetos O_1 que son eficientes o no dominados respecto del orden P . Se coloca $h = 1$, y se va a (II).

(II) Si se puede admitir como solución O_h , se para; si no, se va al paso (III).

(III) Se define un nuevo orden parcial P_h , sobre el conjunto de objetos O_h . Se calcula el conjunto de objetos O_{h+1} que son no dominados respecto del orden P_h . Se coloca $h = h + 1$ y se vuelve al paso (II).

Cada técnica queda caracterizada por la construcción de los distintos órdenes de preferencia P_h . En el trabajo se analizan las metodologías *Promethee* y *Electre*. Para construir el orden de preferencia, la metodología *Promethee* utiliza como símil el

método de flujos en redes. En cada ciclo, se construye un grafo tal que los vértices son los objetos. El grafo es dirigido y completo. A cada arco, se le asigna un número que se denomina *flujo* (flujo que sale del vértice inicial del arco y va hacia el vértice final). Estos flujos se utilizan para construir el orden parcial entre los objetos. El método *Electre* construye un orden parcial utilizando índices de concordancia y discordancia entre los objetos.

2.7.1. Método Promethee

La metodología *Promethee* (Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation) agrupa a un conjunto de técnicas fundamentadas en relaciones ordinales, que suelen ser válidas para resolver problemas multiatributo. Estas técnicas fueron introducidas por B. Roy [18]. A continuación se explica su metodología.

Sea $O = \{o_1, o_2, \dots, o_N\}$ el conjunto de objetos y $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ el conjunto de características. Se supone que la imagen de cada característica está contenida en un conjunto finito totalmente ordenado. En la mayoría de las ocasiones dicho conjunto es numérico. Se construyen relaciones de preferencia parciales entre los objetos, en función de la importancia relativa entre cada par de objetos o_k y o_r , para la característica V_j . Sólo se define la relación entre el par de objetos o_k, o_r , para la característica V_j , cuando o_k es preferido o indiferente a o_r , respecto de la característica considerada.

Estas relaciones se definen por los números:

$$P_j(o_k, o_r) \in [0,1], \quad \text{para } j = 1, \dots, n,$$

donde $o_k, o_r \in O$.

A dichos números se les suele asignar los siguientes significados:

Si $P_j(o_k, o_r) = 0$, entonces o_k es indiferente o no preferido a o_r . Si $P_j(o_k, o_r) \approx 0$, donde ≈ 0 , significa un número positivo próximo a cero, entonces o_k es débilmente preferido a o_r . Si $P_j(o_k, o_r) \approx 0.5$, entonces o_k es preferido moderadamente a o_r . Si $P_j(o_k, o_r) \approx 0.75$, entonces o_k es preferido fuertemente a o_r . Finalmente, Si $P_j(o_k, o_r) \approx 1$, entonces o_k es preferido absolutamente a o_r .

Para medir la importancia relativa entre cada par de objetos o_k y o_r , cuando las características toman valores numéricos; se elige una función de distribución de probabilidad H , que concentre toda su probabilidad en los números positivos, y se define:

$$P_j(o_k, o_r) = H(V_j(o_k) - V_j(o_r)).$$

La función H se puede modificar, y por supuesto puede ser distinta para cada una de las características. La función de distribución H para cada característica determina la importancia relativa del objeto o_k respecto del objeto o_r . Asignando un peso normalizado π_j a la característica V_j , $j = 1, \dots, n$, se construye, para cada par de objetos, el índice de preferencia multicriterio por la fórmula:

$$\Pi(o_k, o_r) = \sum_{j=1}^n \pi_j P_j(o_k, o_r).$$

Este índice representa el nivel de preferencia del objeto o_k respecto del objeto o_r . En la metodología *Promethee*, los pesos $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$, están normalizados; es decir, para todo j , $\pi_j > 0$, y $\sum_{j=1}^n \pi_j = 1$. En la propuesta inicial de Roy, los pesos una vez fijados, no se podían modificar, pero esta exigencia ha sido relajada posteriormente.

Con estos datos se construye el grafo al que nos hemos referido previamente. Los vértices del grafo son los objetos del conjunto O . Por tanto el grafo tiene N vértices (o nodos). A cada par de vértices o_k, o_r , se asignan dos arcos (o_k, o_r) y (o_r, o_k) . Al arco (o_k, o_r) , se le asigna el flujo

$$\Pi(o_k, o_r) = \sum_{j=1}^n \pi_j P_j(o_k, o_r),$$

y al arco (o_r, o_k) , el flujo

$$\Pi(o_r, o_k) = \sum_{j=1}^n \pi_j P_j(o_r, o_k).$$

Con estos datos se calculan el flujo de salida, el flujo de entrada y el flujo neto, asignados a cada objeto, por las siguientes fórmulas:

Flujo de salida:

$$\Phi^+(o_s) = \sum_{i \neq s, i=1}^N \Pi(o_s, o_i).$$

Flujo de entrada:

$$\Phi^-(o_s) = \sum_{i \neq s, i=1}^N \Pi(o_i, o_s).$$

Flujo neto:

$$\Phi(o_s) = \Phi^+(o_s) - \Phi^-(o_s).$$

En el método *Promethee*, las preferencias se definen mediante los anteriores flujos. Se describen a continuación algunas técnicas *Promethee*.

Promethee I

Se define la relación de preferencia de la siguiente forma:

$$o_k \text{ es preferido a } o_r \Leftrightarrow \Phi^+(o_k) \geq \Phi^+(o_r) \text{ y } \Phi^-(o_r) \geq \Phi^-(o_k),$$

siendo estricta al menos una de las dos desigualdades.

$$o_k \text{ es incomparable con } o_r \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi^+(o_k) > \Phi^+(o_r) & \text{y } \Phi^-(o_r) < \Phi^-(o_k) \\ \text{o} \\ \Phi^+(o_k) < \Phi^+(o_r) & \text{y } \Phi^-(o_r) > \Phi^-(o_k) \end{cases}.$$

Promethee II

Se utiliza el flujo neto para la relación de preferencia:

$$\Phi(o_i) = \Phi^+(o_i) - \Phi^-(o_i).$$

El orden inducido es el siguiente:

$$o_k \text{ es preferido a } o_r \Leftrightarrow \Phi(o_k) > \Phi(o_r) \quad \text{y}$$

$$o_k \text{ es indiferente a } o_r \Leftrightarrow \Phi(o_k) = \Phi(o_r).$$

En este caso el flujo neto es una función de valor.

OBSERVACIONES:

(i) En otras técnicas umbrales, se puede decir que o_k es preferido a o_r , si y sólo si, se verifica:

$$\Pi(o_k, o_r) - \Pi(o_r, o_k) \geq \alpha_{kr} > 0.$$

(ii) Los cambios en los umbrales y en las ponderaciones, permiten modificar las preferencias, adaptándolas, como en los métodos interactivos, al decisor.

(iii) En cada interacción del método, se eliminan algunos objetos; obligando a definir nuevas funciones Φ de flujo. Se obtiene la solución, cuando quedan un número pequeño de objetos indiferentes para el decisor, o sólo queda un objeto, que sería la solución.

2.7.2. Método Electre

El método *Electre*, similar al *Promethee*, pertenece a las técnicas denominadas de ordenación u out-ranking. Para establecer la relación de preferencia entre cada par de objetos la metodología *Electre* necesita realizar una partición del conjunto de características. Para realizar dicha partición se utiliza el siguiente criterio:

Sean o_k y o_r , dos objetos cualesquiera. Se definen:

$$I^+(o_k, o_r) = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid V_j(o_k) > V_j(o_r)\},$$

$$I^=(o_k, o_r) = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid V_j(o_k) = V_j(o_r)\},$$

$$I^-(o_k, o_r) = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid V_j(o_k) < V_j(o_r)\}.$$

Un objeto o_k domina estrictamente a o_r , si y sólo si, $I^+(o_k, o_r) = n$; y o_k domina fuertemente a o_r , si y sólo si, $I^-(o_k, o_r) = \emptyset$. Todos los objetos que son fuertemente dominados pueden ser eliminados de consideraciones ulteriores. Se denotará por O^* el

conjunto de objetos que no son dominados fuertemente. Para construir el orden parcial entre objetos, la metodología *Electre* utiliza, en general, un índice de concordancia y un índice de discordancia, que se modifican según el tipo de técnica. Se exponen a continuación algunas de dichas técnicas.

Electre I

Este método resuelve un problema de elección, al seleccionar el mejor objeto, mediante la eliminación de aquellas opciones peores que la mejor.

Para construir la relación *out-ranking*, con cada característica V_j , se asigna un peso π_j , que crece en función de la mayor importancia de la característica; y con cada par de acciones, se asocia el siguiente índice de concordancia:

$$ICON(o_k, o_r) = \frac{1}{n} \sum_{j: V_j(o_k) \geq V_j(o_r)} \pi_j, \quad \text{siendo} \quad \sum_{j=1}^n \pi_j = n.$$

$ICON$ toma valores entre 0 y 1.

Además del índice de concordancia, se define un índice de discordancia:

$$DISC(o_k, o_r) = \begin{cases} 0 & \text{si } V_j(o_k) \geq V_j(o_r) \\ \frac{1}{\delta} \max_j \{ V_j(o_r) - V_j(o_k) \} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\delta = \max_{k,r,j} \{ V_j(o_k) - V_j(o_r) \}$.

Existen dos formas de definir la relación S *out-ranking*:

- (I) $(o_k, o_r) \in S \Leftrightarrow ICON(o_k, o_r) \geq c_0 \quad \wedge \quad DISC(o_k, o_r) \leq d_0.$
- (II) $(o_k, o_r) \in S \Leftrightarrow ICON(o_k, o_r) \geq c_0 \quad \wedge \quad (V_j(o_k), V_j(o_r)) \notin D_j, \text{ para todo } j.$

Donde D_j es el conjunto de discordancia asociado a la característica j -ésima y, c_0 y d_0 son valores umbrales. Según la forma en que se defina el índice de discordancia, el procedimiento operativo elimina todos los objetos no preferidos, y sobre los objetos no eliminados, se construye, iterativamente, otra relación *out-ranking*, procediendo como con la relación previa. Se prosigue hasta que queda un solo objeto, o hasta que todos los objetos que quedan, son equivalentes para el decisor.

El método Electre I, fue el primer método *out-ranking* utilizado en la literatura. Se aplica en la resolución de muchos problemas reales.

Electre II

Se utiliza para ordenar el conjunto O de objetos. Los índices de concordancia y discordancia se definen igual que en el método Electre I, aunque los autores

introdujeron algunas modificaciones en las definiciones de las relaciones binarias *out-ranking*. Se utilizan dos umbrales c_0 y c_1 con $c_0 > c_1$. Con ellos se definen dos relaciones *out-ranking* SF y SD , que se denominan fuerte y débil.

$$(o_k, o_r) \in SF \Leftrightarrow ICON(o_k, o_r) \geq c_0 \quad \wedge \quad \sum_{j/V_j(o_k) > V_j(o_r)} \pi_j > \sum_{j/V_j(o_k) < V_j(o_r)} \pi_j \quad \wedge \quad (V_j(o_k), V_j(o_r)) \notin D_j, \quad \forall j.$$

$$(o_k, o_r) \in SD \Leftrightarrow ICON(o_k, o_r) \geq c_1 \quad \wedge \quad \sum_{j/V_j(o_k) > V_j(o_r)} \pi_j > \sum_{j/V_j(o_k) < V_j(o_r)} \pi_j \quad \wedge \quad (V_j(o_k), V_j(o_r)) \notin D_j, \quad \forall j.$$

Para construir la discordancia, se pueden también utilizar dos niveles de severidad, para cada característica j , utilizando dos conjuntos de discordancia D_{j_1} y D_{j_2} con $D_{j_2} \subset D_{j_1}$.

Electre III

La relación *out-ranking* del método Electre III se caracteriza por la definición de un grado *out-ranking* $S(o_k, o_r)$, asociado con cada par ordenado de opciones, representando la credibilidad *out-ranking* de o_k sobre o_r . Para su construcción, se define:

$$c_j(o_k, o_r) = 1, \quad \text{si} \quad V_j(o_k) + q_j(V_j(o_k)) \geq V_j(o_r),$$

$$c_j(o_k, o_r) = 0, \quad \text{si} \quad V_j(o_k) + \pi_j(V_j(o_k)) \leq V_j(o_r),$$

y, en otro caso, $c_j(o_k, o_r)$ es lineal entre ambos valores. Siendo q_j y π_j umbrales de indiferencia y preferencia respectivamente.

Se define

$$c(o_k, o_r) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \pi_j c_j(o_k, o_r), \quad \text{siendo} \quad \sum_{j=1}^n \pi_j = n.$$

La definición de discordancia requiere la introducción de un umbral veto $v_j(V_j(o_k))$. El índice de discordancia se define para cada característica por las fórmulas:

$$d_j(o_k, o_r) = 0, \quad \text{si} \quad V_j(o_k) + \pi_j(V_j(o_k)) \geq V_j(o_r),$$

$$d_j(o_k, o_r) = 1, \quad \text{si} \quad V_j(o_k) + v_j(V_j(o_k)) \leq V_j(o_r),$$

y, en otro caso, $d_j(o_k, o_r)$ es lineal entre ambos valores. Finalmente, el grado *outranking* se define por:

$$S(o_k, o_r) = \begin{cases} c(o_k, o_r) & \text{si } d_j(o_k, o_r) \leq c(o_k, o_r) \quad \forall j \\ c(o_k, o_r) \prod_{j \in J(o_k, o_r)} \frac{1 - d_j(o_k, o_r)}{1 - c(o_k, o_r)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $J(o_k, o_r)$ es el conjunto de características para las cuales $d_j(o_k, o_r) > c(o_k, o_r)$. El grado *out-ranking* es igual al índice de concordancia cuando no existe ninguna característica discordante; en el caso opuesto, se rebaja el índice de concordancia en función de la importancia de las discordancias.

Sea

$$\lambda = \max_{o_k, o_r \in O} S(o_k, o_r).$$

Sólo se consideran aquellos pares de acciones o_k y o_r tales que $S(o_k, o_r) \geq \lambda - s(\lambda)$, siendo $s(\lambda)$ un umbral que debe ser determinado. El conjunto de opciones que no son mejoradas constituyen la primera destilación D_1 . Si D_1 sólo contiene una acción, el procedimiento previo se comienza de nuevo considerando $O \setminus D_1$. En otro caso, se utiliza el mismo procedimiento en D_1 , hasta que se obtiene la mejor acción.

Electre IV

Este método, como el previo, se fundamenta en una familia de *pseudocriterios*, y su objetivo es ordenar los objetos sin atribuir pesos a las características. Se construyen dos relaciones una fuerte SF y una débil SD .

$(o_k, o_r) \in SF \Leftrightarrow$ no existe ninguna característica para la cual o_r sea fuertemente preferido a o_k ; y el número de características, para las cuales o_r es débilmente preferido a o_k , es a lo sumo igual al número de características para las cuales o_k es fuerte o débilmente preferido a o_r .

$(o_k, o_r) \in SD \Leftrightarrow$ no existe ninguna característica para la cual o_r es fuertemente preferido a o_k , aunque no se cumple la segunda condición del *out-ranking* fuerte; o sólo existe una característica para la cual o_r es fuertemente preferido a o_k , siempre que no supere el umbral de veto, pero el número de características para las cuales o_k es preferido a o_r , es al menos la mitad de las características.

APLICACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN MULTI OBJETIVO EN ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS OBTENIDOS POR DISEÑOS

3.1. Introducción

En muchos casos, la investigación consiste en experimentar con un número determinado de tratamientos, para averiguar cuál de ellos es el mejor. Cuando para realizar este tipo de investigación, se dispone de un espacio poblacional Ω , formado por unidades experimentales homogéneas, se toman, por muestreo aleatorio simple, tantas muestras como tratamientos. Si se dispone de t tratamientos se toman t muestras, denotadas por M_1, M_2, \dots, M_t . Las unidades experimentales de la muestra M_i se tratan con el tratamiento T_i , para $i = 1, 2, \dots, t$. Después de aplicar cada tratamiento sobre las correspondientes unidades experimentales, se deja que haga efecto, y se mide dicho efecto por las variables respuesta $R_1, R_2, \dots, R_j, \dots, R_n$. Se debe tener en cuenta que en programación multiobjetivo, como en la propia investigación, la palabra tratamiento se debe entender en un sentido muy amplio, que sólo se hará preciso cuando se aplica el modelo a cada investigación concreta.

No suele ser difícil determinar qué tratamiento es el mejor respecto de cada una de las variables respuesta, aunque suele suceder que dicho tratamiento no es el mismo para todas las variables. Incluso, aunque sólo se mida una variable respuesta, puede no estar claro determinar cuál es el mejor tratamiento debido a la aleatoriedad de las muestras. La técnica de contrastes de rangos múltiples es una prueba de lo que se dice.

Cuando el espacio poblacional Ω no está formado por unidades experimentales homogéneas, se debe partir dicho espacio poblacional en grupos más pequeños, de tal forma que cada uno de estos grupos esté formado por unidades experimentales homogéneas, para poder comparar los tratamientos entre sí. Cada uno de estos grupos, se denomina un *bloque*. En general, se denota por b al número de bloques. Cuando se investiga con un diseño completo, esto es, se experimenta con todos los tratamientos en todos los bloques, se deben tomar en cada bloque $B_r, r = 1, 2, \dots, b$, tantas muestras como tratamientos. Si se dispone de t tratamientos, se deben seleccionar t muestras por bloque, y a todas las unidades experimentales de las muestras i -ésimas de todos los bloques, se les aplica el tratamiento T_i , midiéndose el efecto de los tratamientos sobre las unidades experimentales por las variables respuesta $R_1, R_2, \dots, R_j, \dots, R_n$. Con esta formulación, el problema equivale a resolver b problemas idénticos al problema de unidades experimentales homogéneas. Por ello, no se abordará en este trabajo dicho problema, por no aportar originalidad. En cambio, pueden aportar ideas originales los diseños incompletos; pero son de tal variedad y magnitud, que se deja su estudio para posteriores investigaciones.

Además de esta introducción, este capítulo consta de los siguientes apartados. En el epígrafe segundo, se formulan los correspondientes problemas multiobjetivo asociados con los problemas mencionados. En el epígrafe tercero, se analizan los modelos discretos; en el cuarto, se formulan los modelos paramétricos, centrando el estudio esencialmente en el modelo normal; en el quinto, se analizan los modelos no paramétricos y finalmente, en el epígrafe sexto, se analizan los modelos mixtos. Los modelos teóricos se completan con algunos casos prácticos ilustrativos.

3.2. Fundamentos y formulación de problemas multiobjetivo

Para adaptar la investigación por Diseños de Experimentos a la programación multiobjetivo, se considera que el conjunto de los tratamientos $\{T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_t\}$ son el conjunto de objetos O . Las variables respuesta $R_1, R_2, \dots, R_j, \dots, R_n$, que se miden sobre los objetos y las unidades experimentales, son las características del modelo multiobjetivo. Los objetivos se definen, en cada problema particular, para reducir la información disponible, con el fin de resolver más fácilmente el problema de hallar el mejor objeto. Se definirán las características en algunos ejemplos concretos.

En la formulación anterior, las características son variables aleatorias, ya que son funciones de los objetos y de las unidades experimentales $R_j(T_i, \omega_{is})$. Con esta notación, la unidad experimental s -ésima de la muestra M_i , se denota por ω_{is} .

Las técnicas que se suelen utilizar en la resolución de estos problemas estadísticos son las interactivas, que utilizan funciones de valor parciales, las *out-ranking*, las lexicográficas y las de enumeración parcial de las soluciones eficientes.

Como las características no suelen ser determinísticas, suele ser adecuado utilizar modelos aleatorios para resolver los problemas. Estos modelos se clasifican en, modelos paramétricos y no paramétricos y, según sea el tipo de datos, en discretos y continuos. En cualquier problema multiobjetivo, suele ser frecuente que aparezcan mezclados entre sí distintos tipos de modelos.

El buen sentido sólo admite definir los objetivos sobre variables respuesta que se engloban en la misma clase de modelos. No obstante se admite, y en la práctica es frecuente, que los objetivos cambien el tipo de modelo, por las transformaciones que sobre los datos hacen las funciones objetivo. También es posible reducir el número de objetivos mediante ponderaciones.

3.3. Modelos Aleatorios Discretos

Los modelos aleatorios discretos se caracterizan porque las variables respuesta sólo pueden tomar un número contable de valores, donde contable significa finito o numerable. Desde un punto de vista teórico, todos los modelos discretos se pueden considerar como paramétricos. No obstante, sólo se considerarán como modelos paramétricos discretos, aquellos modelos en los que el número de parámetros es mucho menor que el número de datos. Entre los modelos discretos más frecuentes están el

Binomial, Binomial Negativo, De Poisson y Multinomial; y sus modelos asociados, *Hipergeométrico y Multihipergeométrico*; siendo válidos, estos últimos, cuando se utiliza el muestreo sin reposición en poblaciones con un número pequeño de unidades experimentales. Se analiza el modelo Binomial, ya que el análisis del resto de los modelos es similar.

3.3.1. Modelo Binomial

El modelo Binomial se caracteriza porque cada variable respuesta clasifica al espacio poblacional en dos clases. El significado de cada una de las clases suele ser muy diverso y depende de cada problema particular. Entre estos significados se encuentran: Bueno y Malo, Éxito y Fracaso, Supervivencia y no Supervivencia, Factor de Riesgo Positivo y Factor de Riesgo Negativo, Enfermo y Sano, Sobrevive o Muere, Agua Potable y No Potable, etc.. Desde un punto de vista genérico, se utiliza la terminología de Éxito y Fracaso para designar las dos clases.

El modelo Binomial no suele presentarse de manera natural, sino que como consecuencia del interés de la investigación, es conveniente clasificar a las unidades experimentales en dos clases. Si esto es así, sólo interesa al investigador el número de unidades experimentales de la muestra que pertenecen a cada clase. En este tipo de modelización, se admite que el tamaño muestral puede ser distinto para cada tratamiento. También suele suceder, que no se pueden medir todas las variables respuesta, en todas las unidades experimentales a las que se haya aplicado el mismo tratamiento.

Se supone que todas las variables respuesta R_j , se ajustan al modelo binomial, para cada uno de los tratamientos. El modelo binomial se denota por $BI(\bar{n}_j, p_j)$, donde \bar{n}_j es el número de unidades experimentales en las que se ha medido la variable R_j , y p_j es la probabilidad de éxito para la variable R_j .

En el caso general, se supone que se dispone de los siguientes datos:

Tamaño de las muestras: $(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_t)$, donde n_i es el número de elementos, o unidades experimentales, a los que se ha aplicado el tratamiento T_i .

Número de Medidas de cada Variable: $(n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{ij}, \dots, n_{in})$, siendo n_{ij} el número de unidades experimentales en las que se mide la variable R_j , para el tratamiento T_i .

Número de Éxitos por Tratamiento y Variable Respuesta: $(m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{ij}, \dots, m_{in})$, siendo m_{ij} , el número de unidades experimentales sobre las que R_j mide éxito, elegidas de las n_{ij} que recibieron el tratamiento T_i , y tuvieron respuesta en dicha variable.

Para los tratamientos T_i , $i = 1, 2, \dots, t$, y para las variables R_j , $j = 1, 2, \dots, n$, las probabilidades de éxito se estiman por los valores

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{m_{ij}}{n_{ij}}.$$

Sin pérdida de generalidad, se puede admitir que para todos los tratamientos y todas las variables, el efecto del tratamiento es tanto mejor, cuanto mayor sea el número de éxitos. Es claro que, si las estimaciones de las probabilidades de éxito para un tratamiento T_i y para todas las variables respuesta, son significativamente mayores que para los demás tratamientos, entonces T_i es el mejor tratamiento.

Más concretamente, si para un nivel de significación α , los intervalos de confianza para p_{ij} , son $[I_{ij}(\alpha), S_{ij}(\alpha)]$, y existe un tratamiento r tal que $I_{rj}(\alpha) > S_{ij}(\alpha)$, para todo $i \neq r$ y para todo $j = 1, 2, \dots, n$, entonces se dice que el tratamiento T_r es el mejor.

También T_r es el mejor tratamiento, cuando $S_{rj}(\alpha) > S_{ij}(\alpha)$ y $I_{rj}(\alpha) > I_{ij}(\alpha)$, para todo $i \neq r$ y para todo $j = 1, 2, \dots, n$. No obstante, en la práctica no suele ser tan fácil hallar el mejor tratamiento. Se precisan las ideas previas en la siguiente definición.

Definición 3.3.1. Sean $[I_{ij}(\alpha), S_{ij}(\alpha)]$, $i = 1, 2, \dots, t$, y $j = 1, 2, \dots, n$, los intervalos de confianza, para un nivel de significación α , de las probabilidades de éxito condicionadas por tratamientos y por variables. Sean T_r y T_i dos tratamientos y

$$D_{irj}(\alpha) = \max\{S_{rj}(\alpha) - S_{ij}(\alpha), 0\},$$

$$D_{rj}(\alpha) = S_{rj}(\alpha) - I_{rj}(\alpha),$$

$$\bar{D}_{rij} = \min\{D_{irj}(\alpha), D_{rj}(\alpha)\}.$$

Se denomina *índice de preferencia superior* del tratamiento T_r sobre el tratamiento T_i , para la variable respuesta R_j , al cociente

$$SI_{ri}(\alpha) = \frac{\bar{D}_{rij}(\alpha)}{D_{rj}(\alpha)}.$$

Se dice que T_r es mejor que el tratamiento T_i , para la variable respuesta R_j , cuando $SI_{ri}(\alpha) \geq \beta \geq 0.5$. Sea

$$\underline{D}_{rij}(\alpha) = \max\{I_{ij}(\alpha) - I_{rj}(\alpha), 0\}.$$

Se denomina *índice de preferencia global* del tratamiento T_r sobre el tratamiento T_i al cociente

$$IPG_{ri}(\alpha) = \frac{(\bar{D}_{rij}(\alpha) - \underline{D}_{rij}(\alpha))}{D_{rj}(\alpha)}.$$

Se dice que el tratamiento T_r es mejor globalmente que el tratamiento T_i , para la variable respuesta R_j , cuando $IPG_{ri}(\alpha) \geq \beta \geq 0.5$.

Definición 3.3.2. Se dice que el tratamiento T_r domina al tratamiento T_i , cuando T_r es mejor globalmente que T_i , para todas las variables respuesta.

Se consideran las definiciones 3.3.1. y 3.3.2. en el modelo de programación multiobjetivo, como estructura de preferencia del decisor, para estudiar que tratamiento es mejor. El algoritmo 3.3.1., tiene en cuenta estas definiciones, para determinar los objetos (tratamientos) eficientes.

Algoritmo 3.3.1. (Algoritmo Interactivo)

Paso 0. Se denota por TR al conjunto de índices de objetos (tratamientos) no dominados. Si $Card(TR)=1$, el problema está resuelto, ya que se ha elegido el mejor tratamiento. En otro caso, ir al paso 1.

Paso 1. Sea V el conjunto de variables. Si $Card(V)=1$ se va al paso 4; en otro caso, se va al paso 2.

Paso 2. Se eligen $j, q \in V$, y dos ponderaciones no negativas π_j y π_q , tales que $\pi_j + \pi_q = 1$. Sin pérdida de generalidad, se supone que $j < q$. Se coloca $V = V \setminus \{q\}$. Se sustituyen las variables R_j y R_q , por la nueva variable R_j . Las probabilidades de éxito para la nueva variable R_j , se estiman por la fórmula:

$$\tilde{p}_{ij} = (\pi_j \tilde{p}_{ij} + \pi_q \tilde{p}_{iq}).$$

Realizadas estas estimaciones, se va al paso 3.

Paso 3. Se eliminan de TR , los índices de los tratamientos dominados, para obtener TRN . Si TRN tiene un sólo índice, se para; pues se ha hallado la solución. En otro caso, se coloca $TR = TRN$ y se vuelve al paso 1.

Paso 4. Se ordenan los tratamientos, según sus índices de preferencia globales para la variable respuesta que queda. Respecto a dicho orden, se hallan los mejores tratamientos. El mejor tratamiento se halla por un proceso interactivo con el decisor.

EJEMPLO 3.3.1.

Se ha experimentado con tres tratamientos. Con cada tratamiento se han medido tres variables respuesta que se pueden ajustar al modelo binomial. Los resultados del experimento se dan en la tabla adjunta:

Tabla 3.3.1. (Tabla de datos del ejemplo 3.3.1.)

	Tamaño muestral	Medidas de la variable R_1	Medidas de la variable R_2	Medidas de la variable R_3
Tratamiento T_1	60	60	58	60
Nº Éxitos		50	20	50
Tratamiento T_2	70	65	70	60
Nº Éxitos		60	10	55

Tratamiento T_3	80	70	80	65
Nº Éxitos		65	40	60

SOLUCIÓN

Para un nivel de significación de 0.05, los intervalos de confianza bilaterales, calculados con las probabilidades exactas, se dan en la Tabla 3.3.2.:

Tabla 3.3.2. (Intervalos de confianza para $\alpha = 0.05$)

Tratamiento 1	[0.6, 0.9]	[0.2, 0.5]	[0.6, 0.9]
Tratamiento 2	[0.8, 1]	[0.1, 0.2]	[0.8, 1]
Tratamiento 3	[0.8, 1]	[0.4, 0.6]	[0.8, 1]

Es claro que el tratamiento 1 es peor que el 3, y que el 2 es también peor que el 3. Luego en este caso el tratamiento 3 es el mejor.

OBSERVACIONES:

(i) Se ha desarrollado la técnica algorítmica para el modelo binomial. Para los otros modelos citados, Binomial Negativo, Poisson, Multinomial, Hipergeométrico y Multihipergeométrico, los conceptos y algoritmos tienen un desarrollo que es similar al expuesto para el modelo binomial.

(ii) Los intervalos de confianza se han calculado mediante las probabilidades exactas, usando una técnica bilateral. Se ha supuesto que las probabilidades, de los valores eliminados por cada lado, es siempre menor o igual que 0.025.

3.4. Modelos Continuos Paramétricos

En estos casos, se supone que todas las variables R_j tienen como modelo de probabilidad una función de densidad que pertenece a una cierta clase de densidades paramétricas continuas, como puede ser la normal, la exponencial, la gamma, la beta, o cualquier otro modelo. El enfoque multiobjetivo es similar para todos los casos, y por ello, se desarrolla el enfoque multiobjetivo para el modelo normal.

3.4.1. Estructuras de dominación por conos

El modelo normal se caracteriza porque su función de densidad es:

$$f(x/\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Los dos parámetros μ y σ , que representan la media y la desviación típica de la variable normal, son esenciales en el modelo multiobjetivo.

Algoritmo 3.4.1. (Algoritmo Interactivo)

Paso 1. Sea V el conjunto de variables. Si $Card(V)=1$, se va al paso 4; en otro caso, se va al paso 2.

Paso 2. Se eligen $j, q \in V$, y dos ponderaciones no negativas π_j y π_q , tales que $\pi_j + \pi_q = 1$. Sin pérdida de generalidad, se supone que $j < q$. Se coloca $V = V \setminus \{q\}$. Se sustituyen las variables R_j y R_q , por la nueva variable R_j , definida como

$$R_j = \pi_j R_j + \pi_q R_q .$$

Es bien conocido, que la nueva variable R_j se distribuye como una variable normal, cuya nueva media es:

$$\bar{\mu}_j = \pi_j \mu_j + \pi_q \mu_q ,$$

y cuya nueva desviación típica es

$$\bar{\sigma}_j = \sqrt{(\pi_j, \pi_q) \begin{pmatrix} \sigma_j^2 & \sigma_{jq}^2 \\ \sigma_{jq}^2 & \sigma_q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_j \\ \pi_q \end{pmatrix}} ,$$

donde σ_{jq}^2 es la covarianza entre las variables R_j y R_q . Se va al paso 3.

Paso 3. Se eliminan del conjunto TR , los índices de los tratamientos dominados. Sea TRN el nuevo conjunto de índices. Si TRN tiene un sólo índice, se para, pues se ha hallado la solución. En otro caso, se coloca $TR=TRN$, y se vuelve al paso 1.

Paso 4. Se ordenan los tratamientos, de menor a mayor, según sean sus medidas de proximidad. Con respecto a dicho orden, se halla el mejor o los mejores tratamientos, por interacción con el decisor.

EJEMPLO 3.4.1.

Se ha experimentado con tres tratamientos T_1, T_2 y T_3 , se han medido tres variables respuesta, y se han obtenido los siguientes resultados.

Tabla 3.4.1. (Tabla de medidas del ejemplo 3.4.1.)

T_1, R_1	T_1, R_2	T_1, R_3	T_2, R_1	T_2, R_2	T_2, R_3	T_3, R_1	T_3, R_2	T_3, R_3
110,0	7,4	4,1	114,0	7,22	3,8	118,0	7,12	3,5
112,0	7,3	4,3	116,0	7,13	3,9	118,5	7,03	3,7
112,5	7,35	4,5	116,5	7,15	3,75	119,5	7,05	3,8
113,0	7,36	4,4	117,0	7,16	3,9	119,0	7,06	3,9
114,0	7,41	4,32	118,0	7,11	3,94	120,2	6,99	3,82
113,5	7,33	4,13	117,5	7,23	3,93	121,1	6,95	3,93
112,8	7,24	4,12	116,8	7,14	3,82	120,8	6,84	3,72
112,4	7,36	4,16	116,4	7,26	3,86	120,4	7,06	3,76
112,7	7,45	4,17	116,7	7,15	3,87	119,7	6,95	3,77
112,6	7,23	4,14	116,6	7,13	3,94	119,6	6,97	3,74
113,5	7,22	4,15	117,5	7,12	3,95	117,5	6,92	3,75
112,9	7,38	4,12	116,9	7,18	3,92	118,9	6,98	3,62
113,0	7,43	4,14	118,0	7,13	3,94	119,4	6,97	3,64
111,6	7,39	4,13	117,66	7,19	3,93	118,6	6,99	3,73
111,8	7,43	4,16	115,8	7,23	3,86	119,8	6,98	3,56
112,6	7,45	4,17	115,6	7,25	3,87	120,6	7,05	3,57
111,7	7,37	4,16	116,7	7,17	3,89	119,7	7,07	3,76
113,1	7,42	4,17	117,1	7,12		119,1	6,88	3,67
110,9		4,21	115,9	7,2		120,9	7,0	3,71

SOLUCIÓN

Tabla 3.4.2. (Tabla de resultados del ejemplo 3.4.1.)

	Tamaño muestral	Medias	Límite inferior	Límite superior
$T_1 R_1$	19	112.45265	111.9927	112.9125
$T_1 R_2$	18	7.36224	7.3259	7.3985
$T_1 R_3$	19	4.19737	4.1460	4.2487
$T_2 R_1$	19	116.20576	116.2057	117.1269
$T_2 R_2$	19	7.16842	7.1464	7.1905
$T_2 R_3$	17	3.88647	3.8576	3.9153
$T_3 R_1$	19	119.54211	119.0641	120.0211
$T_3 R_2$	19	6.98737	6.9552	7.0195
$T_3 R_3$	19	3.71842	3.6656	3.7712

En la primera columna de la tabla anterior, aparecen los nombres dados a las nueve variables; T_i , hace referencia al tratamiento i , $i = 1, 2, 3$, y R_j , hace referencia a la variable j -ésima, $j = 1, 2, 3$. En la segunda columna, se indican los tamaños muestrales; en la tercera columna, se presentan las medias de las variables; y en las columnas cuarta y quinta, se presentan los límites inferiores y superiores, respectivamente, de los intervalos de confianza, para un nivel de confianza de 0.95.

Si se ponen en una sola tabla los intervalos de confianza para los tres tratamientos y las tres variables, se tiene por filas, los intervalos de confianza para cada uno de los tres tratamientos; y por columnas, los intervalos de confianza para cada una de las tres variables.

Tabla 3.4.3. (Tabla de Intervalos de Confianza)

	Variable 1	Variable 2	Variable 3
Tratamiento 1	[111.9927, 112.9125]	[7.3259, 7.3985]	[4.1460, 4.2487]
Tratamiento 2	[116.2057, 117.1269]	[7.1464, 7.1905]	[3.8576, 3.9153]
Tratamiento 3	[119.0641, 120.0211]	[6.9552, 7.0195]	[3.6656, 3.7712]

Se concluye que, para cada variable, sus tres intervalos de confianza son disjuntos. Las tres medidas son fisiológicas, representando: tensiones arteriales, niveles de PH y niveles de colesterol en sangre. Se sabe que la primera variable es mejor cuanto más se aproxime a 110; la segunda variable es mejor cuando más se aproxime a 7.4 y la tercera variable es mejor cuando más se aproxime a 3. Por tanto, respecto de la primera y la segunda variable, es mejor el tratamiento T_1 . Respecto de la tercera variable el mejor es el tratamiento T_3 . Por tanto, se elimina el tratamiento T_2 , por no ser eficiente.

Como no se ha encontrado el mejor tratamiento, se construyen nuevas variables, denotadas por $T_i R_{12}$, $i = 1, 3$, agrupando en una sola variable las variables 1 y 2 (Tensión Arterial y Nivel de PH), por la fórmula:

$$T_i R_{12} = \frac{2}{3} T_i R_1 + \frac{1}{3} T_i R_2.$$

Las características de estas dos variables se exponen en la tabla 3.4.4.

Tabla 3.4.4. (Tabla de Medias, Errores Estándar y Tamaños Muestrales)

	$T_1 R_{12}$	$T_3 R_{12}$	$T_1 R_3$	$T_3 R_3$
Medias	77.480	82.0239	4.1974	3.7184
Errores típicos	0.1409	0.1506	0.02443	0.02512
Tamaños muestrales	18	19	19	19

Los intervalos de confianza para las nuevas variables se presentan en la tabla 3.4.5. Su interpretación es idéntica a la de la tabla 3.4.3. Los valores a los que se deben aproximar las nuevas variables son 75.8 y 3, respectivamente.

Tabla 3.4.5. (Tabla de Intervalos de Confianza para $\alpha = 0.05$)

	Variable 1-2	Variable 3
Tratamiento 1	[77.198; 77.762]	[5,2135; 5,2902]
Tratamiento 3	[81.723; 82.325]	[4,7731; 4,8430]

Sucede lo mismo que anteriormente; para las variables 1 y 2 es mejor el tratamiento 1 y para la variable 3 es mejor el tratamiento 3. Considerando

$$T_i R_{123} = \frac{4}{5} T_i R_{12} + \frac{1}{5} T_i R_3 .$$

se obtienen los siguientes resultados, que se resumen en la tabla 3.4.6.:

Tabla 3.4.6. (Tabla de Medias, Errores Estándar y Tamaños Muestrales)

	$T_1 R_{123}$	$T_3 R_{123}$
Medias	62.8233	66.3628
Errores típicos	0.114	0.122
Tamaños muestrales	18	19

Los intervalos de confianza para las nuevas variables, se presentan en la tabla 3.4.7. Su interpretación es idéntica a la de la tabla 3.4.3. El valor al que se deben aproximar las nuevas variables es 61.24.

Tabla 3.4.7. (Tabla de Intervalos de Confianza para $\alpha = 0.05$)

	Variable 1-2-3
Tratamiento 1	[62.595, 63.051]
Tratamiento 3	[66.119, 66.607]

El intervalo de confianza del primer tratamiento, se aproxima más al valor ideal 61.24, que los datos del intervalo de confianza del tercer tratamiento. Por ello, se acepta que el primer tratamiento es mejor que el tercero.

NOTA: Las ponderaciones se han elegido de forma arbitraria, sin consultar con decisor alguno. Se ha procedido de esta forma sólo para ilustrar la metodología.

3.5. Modelos No Paramétricos

Se supone que las n variables son continuas y no se pueden modelizar por modelos paramétricos. Se supone que, para cada variable R_j , se conoce un valor v_j , tal que se

desea que los valores de R_j estén, cuanto más próximos mejor, a v_j . Si se tienen n_{ij} medidas para la variable R_j en el tratamiento T_i , se puede construir una medida de proximidad por la fórmula:

$$D(R_j, T_i) = \sum_{q=1}^{n_{ij}} |v_j - R_j(T_i, \omega_{iq})| \pi(|v_j - R_j(T_i, \omega_{iq})|)$$

siendo la función π una ponderación que sólo depende de la cantidad positiva $|v_j - R_j(T_i, \omega_{iq})|$. Por motivo de consistencia, la función ponderación, π , debe ser monótona no decreciente.

Definición 3.5.1. Un tratamiento T_r es mejor que el tratamiento T_i , para la variable respuesta R_j , cuando se verifica: $(D(R_j, T_r)/D(R_j, T_i)) \leq \beta \leq 0.25$.

Un tratamiento T_r domina a un tratamiento T_i , cuando T_r es mejor que el tratamiento T_i , para todas las variables.

Sea TR el conjunto de índices de los tratamientos que no están dominados. Si en el conjunto TR hay un solo índice, se ha hallado la solución al problema. En el caso de que TR tenga más de un índice de tratamiento, se ejecuta el siguiente algoritmo.

Algoritmo 3.5.1. (Algoritmo Interactivo)

Paso 1. Sea V el conjunto de variables. Si $Card(V) = 1$, se va al paso 4; en otro caso, se va al paso 2.

Paso 2. Se eligen $j, q \in V$, y dos ponderaciones no negativas π_j y π_q , tales que $\pi_j + \pi_q = 1$. Sin pérdida de generalidad, se supone que $j < q$. Se coloca $V = V \setminus \{q\}$. Se sustituyen las variables R_j y R_q , por la nueva variable R_{jq} , cuya proximidad $D(R_{jq}, T_i)$ se calcula por la fórmula:

$$D(R_{jq}, T_i) = \pi_j D(R_j, T_i) + \pi_q D(R_q, T_i).$$

Se va al paso tres.

Paso 3. Se eliminan del conjunto TR , los índices de los tratamientos dominados, obteniéndose el nuevo conjunto de índices de tratamientos TR . Si este nuevo TR tiene un sólo índice, se para; pues se ha hallado la solución. En otro caso, se vuelve al paso 1.

Paso 4. Se ordenan los tratamientos, de menor a mayor, según sean sus medidas de proximidad. Con respecto a dicho orden, se halla el mejor o los mejores tratamientos.

NOTA: En la técnica 2 que se aplica en el siguiente ejemplo, en vez de la proximidad, se ha utilizado el test de Kruskal - Wallis o el test de Wilcoxon - Mann - Whitney. Estas técnicas se pueden utilizar cuando se supone la hipótesis de Pareto de que más es mejor.

EJEMPLO 3.5.1.

Se fabrica un cierto tipo de resina sintética con cuatro tratamientos, y como variables respuesta, se mide la *fuerza de tensión* y la *rugosidad*. Respecto de la primera variable, más es mejor; mientras que respecto de la segunda variable, más es peor. Los resultados del experimento se dan en la siguiente tabla.

Tabla 3.5.1. (Tabla de Resultados del Experimento)

T_1, R_1	T_2, R_1	T_3, R_1	T_4, R_1	T_1, R_2	T_2, R_2	T_3, R_2	T_4, R_2
43	38	44	42	0,56	0,54	0,59	0,50
47	42	48	45	0,58	0,56	0,57	0,51
45	41	47	43	0,59	0,55	0,59	0,52
43	40	46	41	0,58	0,57	0,61	0,53
49	44	47	47	0,67	0,64	0,69	0,61
50	47	52	49	0,65	0,61	0,68	0,59
51	46	52	47	0,64	0,60	0,67	0,57
52		54	48	0,66	0,63	0,68	
53	49	53	49	0,67	0,64	0,69	0,61
40	37	42	38	0,45	0,41	0,49	0,40
45	40	47	43	0,46	0,43	0,48	0,41
48	42	49	47	0,46	0,42	0,47	0,43
44	41	46	41	0,43	0,40	0,47	0,38
47	47	48	45	0,42	0,40	0,45	0,36
48			46	0,44	0,41	0,47	0,37
46	43	47	44	0,45	0,42		0,39
49	45	52	47	0,64	0,61	0,68	0,57
43	39	45	42	0,63	0,60	0,65	0,53
44	40	46	43	0,56	0,53	0,59	0,50
42	38	44	41	0,58	0,55	0,60	0,51

SOLUCIÓN

I) Técnica 1

Como semejanza o proximidad respecto de la variable R_1 , fuerza de la tensión, se toma la media de los valores

$$y_{is1} = \max\{0, (50 - R_1(T_i, \omega_{is}))\}$$

y como proximidad de la variable R_2 , se toma la media de los valores

$$z_{is2} = |R_2(T_i, \omega_{is}) - 0.40|.$$

Los valores de los estadísticos descriptivos de estas desemejanzas se muestran en la tabla 3.5.2.

Tabla 3-5-2 (Estadísticos descriptivos)

	Tamaño Muestral	Media	Desviación Típica	Error Típico	Límite Inferior	Límite Superior
T_1, R_1	20	3.85	3.004	0.689	2.184	5.079
T_1, R_2	20	0.156	0.0959	0.0226	0.1068	0.2021
T_2, R_1	18	7.83	3.4036	0.7808	6.202	9.483
T_2, R_2	20	0.116	0.9165	0.2048	0.0856	0.1714
T_3, R_1	19	2.842	2.3632	0.5422	1.7031	3.9811
T_3, R_2	19	0.1852	0.0906	0.0214	0.1399	0.2301
T_4, R_1	20	5.600	3.068	0.686	4.1643	7.0357
T_4, R_2	19	0.0942	0.0858	0.0208	0.0500	0.1382
No válido	17					

Examinados los datos de 3-5-2, se concluye que los mejores tratamientos son T_3 y T_4 .

Ponderando por $1/50$, la variable *fuerza de la tensión* y por $49/50$ la segunda variable o *rugosidad*, se tiene:

$$D(R_{12}, T_3) = \frac{1}{50} D(R_1, T_3) + \frac{49}{50} D(R_2, T_3) =$$

$$\left(\frac{1}{50}\right)(2.842) + \left(\frac{49}{50}\right)(0.1852) = 0.238336,$$

$$D(R_{12}, T_4) = \frac{1}{50} D(R_1, T_4) + \frac{49}{50} D(R_2, T_4) =$$

$$\left(\frac{1}{50}\right)(5.600) + \left(\frac{49}{50}\right)(0.0941) = 0.204218.$$

Con estas ponderaciones, el tratamiento T_4 es mejor que el tratamiento T_3 , por tener menor desemejanza.

II) Técnica 2

Los resultados estadísticos, para cada par de tratamientos, se resumen en tres líneas de la tabla 3.5.3. Los datos por columnas significan: En la primera columna, se presentan los índices de las variables; en la segunda, los índices de los tratamientos; en la tercera y cuarta columnas, se indican los tamaños muestrales de las dos muestras; en las columnas quinta y sexta, se colocan los valores promedio de los rangos de cada una de las dos muestras; y en las columnas séptima y octava, la suma de rangos para los datos de las dos muestras.

En la primera fila de cada bloque de tres filas, se indica el nombre de la variable que hace referencia a la primera muestra; y en la segunda fila, el nombre de la segunda variable. En la tercera línea de cada bloque de tres, se presentan los valores de los estadísticos y sus niveles de significación. En las columnas 2, 3, 4 y 5 se presentan los resultados correspondientes a la primera variable, y en las columnas 6, 7, 8 y 9 se presentan los resultados correspondientes a la segunda variable. En las columnas 2 y 6, se presentan los valores del estadístico W de Wilcoxon – Mann – Whitney; en las columnas 3 y 7, los valores del estadístico correspondiente a la variable normal tipificada, aproximada por el teorema central del límite; en las columnas 4 y 8, se indica el p -valor asintótico bilateral; y finalmente, en las columnas 5 y 9, el p -valor corregido.

Tabla 3.5.3. (Comparación por pares de tratamientos)

Variable		TM1	TM2	RP1	RP2	SR1	SR2	
T_{12}, R_1	T_{12}	20	18	25.66	13.34	487.50	253.50	
T_{12}, R_2	T_{12}	20	20	22.31	16.98	401.5	339.50	
ESTADIS 1	253,500	-3,425	,001	,000(a)	339.50	-1,479	0.139	0.141(a)
T_{13}, R_1	T_{13}	20	19	17,87	21.13	339.50	401.50	
T_{13}, R_2	T_{13}	20	19	15.75	21.25	283.50	382.50	
ESTADIS 2	339,500	-0.909	0.532	0.538(a)	283.500	-1,569	0.224	0.233(a)
T_{14}, R_1	T_{14}	20	20	23.68	16.50	450	330	
T_{14}, R_2	T_{14}	20	19	21.39	14.41	385	245	
ESTADIS 3	330.000	-1.977	0.048	0.050	245.000	-2,015	0.044	0.045
T_{23}, R_1	T_{23}	18	19	11.97	25.66	215.5	487.5	
T_{23}, R_2	T_{23}	20	19	15.45	22.75	293.5	409.5	
ESTADIS 4	215,500	-3.859	0.000	,002(a)	293.50	-2.054	0.040	0.039
T_{24}, R_1	T_{24}	18	20	15.58	23.03	280.50	460.50	
T_{24}, R_2	T_{24}	20	19	20.82	15.91	395.50	270.50	
ESTADIS 5	280.500	-2.072	0.038	0.038(a)	270.500	-1.397	0.162	0.165(a)
T_{34}, R_1	T_{34}	19	20	25.083	15.18 7	476.50	303.50	
T_{34}, R_2	T_{34}	19	19	22.17	13.59	399.00	231.00	
ESTADIS 6	303.50	-2.729	0.006	0.006(a)	231.000	-2.479	0.013	0.013(a)

El tratamiento T_1 tiene valores mayores que el tratamiento T_2 , tanto en la primera variable como en la segunda. El tratamiento T_1 sería mejor que el tratamiento T_2 , para la primera variable y no significativamente peor que el tratamiento T_2 , para la segunda variable. Los tratamientos T_1 y T_3 tienen un comportamiento similar. El tratamiento

T_1 tiene un comportamiento mejor que el tratamiento T_4 para la variable primera, pero el tratamiento T_4 tiene valores inferiores en la variable segunda. Por tanto, el tratamiento T_1 sería peor que el tratamiento T_4 en la segunda variable.

El tratamiento T_2 tiene valores inferiores al tratamiento T_3 en la primera variable, y valores también inferiores en la segunda variable. El tratamiento T_2 tiene valores que son significativamente menores que los correspondientes al tratamiento T_3 , en la variable primera y similares en la variable segunda. Por tanto, el segundo tratamiento es peor que el tercero. El tratamiento T_2 tiene valores que son significativamente menores que los correspondientes al tratamiento T_4 , en la variable primera y similares en la variable segunda. Por tanto, el segundo tratamiento es peor que el cuarto.

El tratamiento T_3 tiene valores que son significativamente mayores que los correspondientes al tratamiento T_4 en las dos variables. Por tanto, el tratamiento T_3 es mejor que el T_4 para la primera variable respuesta y peor que el tratamiento T_4 para la segunda variable.

Como consecuencia de este análisis, el tratamiento T_2 sería eliminado de consideraciones ulteriores, por estar dominado por el tratamiento T_4 . Se debería discriminar entre los tratamientos T_1 , T_3 y T_4 .

Tabla 3.5.4. (Resultados de Kruskal – Wallis y Test de la Mediana)

	TM1	TM2	TM3	TM4	RP1	RP2	RP3	RP4
R_1	20	18	19	20	47.21	21.74	52.84	34.45
R_2	20	20	19	19	40.44	33.48	47.78	26.09
	$\chi^2=22.143$	$gl=3$	$pv=0.000$		$\chi^2=10.183$	$gl=3$	$pv=0.017$	
R_1	9	11	14	4	4	15	8	12
R_2	9	11	12	8	6	13	14	5
	$\chi^2=14.00$	$gl=3$	$pv=0.003$		$\chi^2=5.292$	$gl=3$	$pv=0.152$	
	T1		T2		T3		T4	

En la tabla 3.5.4. se presentan los resultados correspondientes a la estadística no paramétrica multivariable, fundamentada en la comparación conjunta por la técnica de Kruskal – Wallis, de las cuatro variables correspondientes a los cuatro tratamientos.

En la columna número 1 de la tabla 3.5.4., se indica el nombre de la correspondiente variable. En las filas 2 y 3, para las dos variables de *Tensión* y *Rugosidad*, en las columnas 2, 3, 4 y 5, se indican los tamaños muestrales, y en las columnas 6, 7, 8 y 9, la media de los rangos para los cuatro tratamientos. En la fila 4, se presentan los datos correspondientes al estadístico chi-cuadrado asintótico. En las filas 5 y 6, se colocan los datos correspondientes a la mediana para las dos variables. Para cada una de las cuatro muestras, en las columnas que van desde la dos a la nueve, se indica, en primer lugar, el número de unidades experimentales con valores inferiores a la mediana, y a

continuación, el número de unidades experimentales con valores superiores a la mediana. En la fila número seis se presentan los datos correspondientes al estadístico chi-cuadrado asintótico.

De los datos de la tabla 3.5.4 se infiere que el tratamiento T_2 está dominado por el tratamiento T_4 . El mejor tratamiento para la variable segunda es T_4 , mientras que el mejor tratamiento para la variable primera es T_3 . Los tratamientos T_1 y T_3 serían similares.

De ambos análisis, se concluye que los mejores tratamientos son T_3 y T_4 . A continuación, se estudia cuál de estos tratamientos es el mejor, sintetizando las dos variables en una sola. La transformación se realiza por la expresión:

$$\frac{1}{99}(T_i R_1) - \frac{98}{99}(T_i R_2), \text{ para } i = 3, 4.$$

Tabla 4.5.5.

TM3	TM4	RP3	RP4	SR3	SR4
17	17	13.29	21.71	226	369

Obteniéndose un valor para la normal estandarizada asintótica:

$$z_{34} = \frac{\bar{R}_3 - \bar{R}_4}{\sqrt{\frac{N(N+1)}{12}} \sqrt{\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}}} = -2.463$$

que corresponde a un p -valor bilateral: $pv = 0.0137$.

Con esta transformación, el decisor está de acuerdo en que más es mejor. Por ello, si la hipótesis del decisor es correcta el mejor tratamiento será T_4 .

OBSERVACIONES:

- (i) Los objetivos se forman mediante las ponderaciones de las variables. De esta forma cada objetivo reduce el número de características.
- (ii) Las ponderaciones de las dos características que se transforman en una sola, son positivas cuando las dos características concuerdan; y en una característica es positiva y en otra es negativa, cuando las dos características son discordantes. Dos características son concordantes cuando más es mejor, o más es peor, para las dos características, y son discordantes cuando más es mejor para una característica y más es peor para la otra característica.
- (iii) Determinar por interacción con el decisor las ponderaciones de las características, no suele ser un problema fácil. Esta dificultad contempla la posibilidad de que haya caminos de ida y vuelta en la determinación de las ponderaciones.
- (iv) En todo el desarrollo de este capítulo, la reducción de la información se consigue formando objetivos mediante la ponderación de características. Para posteriores investigaciones queda el estudio de cómo reducir información mediante la eliminación

de características por ponderaciones globales de la importancia que tienen para el decisor las variables respuesta.

3.6. Caso General

Se supone que las variables que se miden pertenecen a más de un tipo, es decir, hay variables discretas, variables que se pueden modelizar por una densidad y variables cuya distribución es no paramétrica. Con los procedimientos descritos anteriormente, se puede conseguir reducir las variables de forma que sólo haya una de cada tipo. El conjunto de tratamientos con los que se inicia la investigación, son los tratamientos no dominados por al menos una de las variables respuesta que permanecen en el análisis.

Por lo indicado, se supone que se tienen tres variables: R_1 variable discreta, R_2 variable continua, que se ajusta a una función de densidad paramétrica, y una variable R_3 ordinal, que puede ser continua o discreta, pero que toma un número suficientemente grande de valores como para que no se pueda analizar por un modelo discreto.

Se supone que hay t tratamientos y que los tamaños de las muestras a las que se han aplicado los t tratamientos son, respectivamente: $n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_t$.

Se denota por n_{ij} , $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \dots, t$, el número de medidas obtenidas de la variable R_j , sobre unidades de la muestra M_i , a las que se ha aplicado el tratamiento T_i .

El número de modelos adecuados para el análisis de estos datos, es teóricamente ilimitado. Se desarrolla una técnica bastante similar a la expuesta en el algoritmo de variables no paramétricas. La técnica supone que el decisor conoce un valor ideal para cada una de las tres variables. Sean estos valores y_1, y_2, y_3 .

Se denota por x_{ijr} , la medida que con la variable R_j , se ha obtenido de la unidad experimental $\omega_{ir} \in M_i$, es decir, la unidad experimental r -ésima de la muestra M_i . Como se ha indicado, todas las unidades experimentales de la muestra M_i , han recibido el tratamiento T_i , y por tanto,

$$x_{ijr} = R_j(T_i, \omega_{ir}), \quad i = 1, 2, \dots, t, \quad j = 1, 2, 3, \quad y \quad r = 1, 2, \dots, n_{ij}.$$

Mediante alguna medida de proximidad o semejanza P , se supone que se puede medir la siguiente proximidad:

$$P(T_i, R_j) = P\left(\{x_{ij1}, x_{ij2}, \dots, x_{ijr}, \dots, x_{ijn_{ij}}\}, y_j\right).$$

Sean tres niveles propuestos por el decisor E_1, E_2, E_3 .

Definición 3.6.1. Se dice que el tratamiento T_i , es mejor que el tratamiento T_q , para la variable R_j , cuando y sólo cuando, se verifica:

$$P(T_i, R_j) \geq P(T_q, R_j) + E_j.$$

Cuando lo que se considera es un coeficiente de desemejanza D , T_i , es mejor que el tratamiento T_q , para la variable R_j , cuando y sólo cuando, se verifica:

$$D(T_q, R_j) \geq D(T_i, R_j) + E_j.$$

Cada $P(T_i, R_j) = P_j(T_i)$ se puede considerar como un objetivo. Con este punto de vista, se puede contemplar el problema como un problema de tres objetivos.

Se puede utilizar para resolver el problema, cualquiera de las técnicas multiatributo desarrolladas en el capítulo segundo. Se elige, en primer lugar, la técnica de las ponderaciones, seguida cuando sea necesario, de la técnica de las semirrectas.

EJEMPLO 3.6.1.

Se experimenta con 4 tratamientos y se miden tres variables, en un modelo mixto. Los resultados de las medidas se muestran en la tabla 3.6.1.

Tabla 3-6-1 (Tabla de Datos del Experimento)

$T_1 R_1$	$T_2 R_1$	$T_3 R_1$	$T_4 R_1$	$T_1 R_2$	$T_2 R_2$	$T_3 R_2$	$T_4 R_2$	$T_1 R_3$	$T_2 R_3$	$T_3 R_3$	$T_4 R_3$
3	3	2	5	110	112	114	110	4,3	4,38	4,12	4,38
4	4	4	3	112	115	112	110	4,2	4,22	4,142	4,28
5	3	4	4	112	112	113	108	4,1	4,13	4,05	4,19
4	4	4	4	113	116	115	107	4,4	4,14	4,34	4,48
5	4	3	5	114	115	116	116	4,44	4,1		4,48
3	2	3	3	110	112	113	106	4,46	4,43	4,41	4,58
5	4	4	4	109	111	114	107	4,23	4,13	4,17	4,29
5	5		5	108	108	112	109	4,24	4,124	4,19	4,32
3	3	4	4	111	114	114	115	4,25	4,15	4,15	4,34
5	3	3	5	112	113	113	113	4,21		4,19	4,29
4	2	3	3	109	112	115	106	4,22	4,26	4,12	4,28
4	4	4	3	108	111	114	106	4,21	4,28	4,15	4,27
5	5	5	4	107	110	111	107	4,24	4,14	4,14	4,29
3	3	2	2	109	111	112	105	4,23	4,13	4,13	4,28
5	3	3	5	110	112	113	110	4,21	4,12	4,11	4,27

SOLUCIÓN

Para la variable 1, las desemejanzas se calculan como las medias de la expresión:

$$D_1(T_i) = 5 - T_i R_1(T_i, \omega_i).$$

Para la segunda variable, las desemejanzas se calculan como las medias de la expresión:

$$D_2(T_i) = T_i R_2(T_i, \omega_i) - 110, \text{ si } T_i R_2(T_i, \omega_i) - 110 > 0$$

$$D_2(T_i) = -T_i R_2(T_i, \omega_i) + 110, \text{ si } T_i R_2(T_i, \omega_i) - 110 < 0.$$

Para la tercera variable, las desemejanzas se calculan como las medias de la expresión:

$$D_3(T_i) = T_i R_3(T_i, \omega_i) - 4.2, \text{ si } T_i R_3(T_i, \omega_i) - 4.2 > 0$$

$$D_3(T_i) = -T_i R_3(T_i, \omega_i) + 4.2, \text{ si } T_i R_3(T_i, \omega_i) - 4.2 < 0.$$

Los resultados de los cálculos estadísticos para las desemejanzas, que son contrarias a las proximidades, aparecen en la tabla 3.6.2. La primera fila de la tabla es auto explicativa. Los límites inferior y superior, son los valores del intervalo de confianza para un nivel de significación de $\alpha = 0.05$.

Tabla 3-6-2 (Tabla de resultados)

	Tamaño Muestral	SUMA	MEDIA	Error Típico	Desviación Típica	Límite Inferior	Limite Superior
$T_1 R_1$	15	12,00	,8000	,2225	,86189	0.355	1.245
$T_2 R_1$	15	23,00	1,5333	,2363	,91548	1.0604	2.0056
$T_3 R_1$	14	22,00	1,5714	,2276	,85163	1.1162	2.0266
$T_4 R_1$	15	16,00	1,0667	,2481	,96115	0.5705	1.5629
$T_1 R_2$	15	34,00	2,2667	,4415	1,70992	1,3837	3.1497
$T_2 R_2$	15	40,00	2,6667	,4542	1,75933	1.7583	3.5751
$T_3 R_2$	15	51,00	3,4000	,3491	1,35225	2.7018	4.0982
$T_4 R_2$	15	72,00	4,8000	,8292	3,21159	3.1416	6.4584
$T_1 R_3$	15	9,70	,6467	,4716	1,82658	0.000	1.5899
$T_2 R_3$	14	10,57	,7550	,5596	2,09417	0.000	1.8742
$T_3 R_3$	14	1,65	,1182	,0478	,17910	0.0226	0.2138
$T_4 R_3$	15	5,98	,3987	,0759	,29396	0.2469	0.5505

Puesto que en el ejemplo se trata de minimizar la desemejanza, un tratamiento T_i , es mejor que T_q , para la variable R_j , cuando se verifica:

$$D(T_q, R_j) \geq D(T_i, R_j) + E_j.$$

Si se toman como errores permitidos para las medias: $E_1 = 0.25$, $E_2 = 0.5$, y $E_3 = 0,25$, se observa que $T_1 R_1$ domina a $T_2 R_1$, $T_3 R_1$ y $T_4 R_1$; $T_1 R_2$ y $T_2 R_2$ dominan a $T_3 R_2$ y $T_4 R_2$; y $T_3 R_3$ domina a $T_1 R_3$, $T_2 R_3$ y $T_4 R_3$. Luego en el espacio de tres características son puntos no dominados:

$(0.8, 2.27, 0.647), (1.53, 2.67, 0.75), (1.57, 3.4, 0.1182), (1.0667, 4.8, 0.3987)$

Es claro, que en el espacio de las tres caracterís, ninguno de los cuatro resultados está dominado.

Un decisor está de acuerdo en que las ponderaciones adecuadas son las siguientes: $(0.375, 0.125, 0.5)$. Con estas ponderaciones, los objetivos se transforman en uno, cuyos valores son: $(0.90725, 1.2825, 1.10475, 1.17686)$. Si se utilizan las mismas ponderaciones para calcular el error global, éste sería: $E = 0.28125$. Con estos datos, el tratamiento T_1 domina al tratamiento T_2 , y prácticamente domina también al tratamiento T_4 , ya que $1.17686 - 0.90725 = 0.26961$, muy próximo al error E .

Las comparaciones entre los tratamientos T_1 y T_3 , se deben realizar con otras ponderaciones.

APLICACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN MULTIOBJETIVO A LA ORDENACIÓN DE OBJETOS

4.1. Introducción

Gran número de investigaciones actuales tienen como punto de partida datos obtenidos mediante cuestionarios. Los datos se obtienen de las respuestas que dan a las cuestiones del cuestionario, las personas pertenecientes a una muestra elegida adecuadamente de una determinada población de referencia. Las personas de la muestra son las unidades experimentales de la investigación.

Este tipo de datos se analizan fundamentalmente desde dos puntos de vista: (i) El análisis clásico, que consiste en tratar las cuestiones como variables y (ii) El segundo enfoque, que tiene por objeto obtener alguna medida sobre la validez del cuestionario para su diseñador. Respecto del primer punto de vista, como las cuestiones sólo suelen permitir respuestas discretas, el análisis consiste en un análisis estadístico discreto de los datos, mediante frecuencias unidimensionales o multidimensionales. Respecto del segundo punto de vista, la medida persigue contrastar la consistencia entre determinadas preguntas del cuestionario diseñado por el investigador y los datos obtenidos mediante las respuestas dadas por las unidades experimentales de la muestra. Para establecer dicha medida se suele utilizar alguna *técnica cluster* aplicada a las variables. Por tanto, en este segundo enfoque de análisis de datos, se tratan a las variables como si fueran las unidades experimentales. Para cada par de variables, se mide algún coeficiente de desemejanza, en función de las respuestas dadas a estas dos variables por las unidades muestrales. El objetivo final del análisis, es análogo al del *Análisis de Proximidades*, que consiste en representar el conjunto de variables mediante un subconjunto de R , o de R^k , de tal forma que la mayor proximidad entre los puntos se corresponda con un menor coeficiente de desemejanza de las variables representadas por los puntos.

En general, el problema se formula en los siguientes términos: A partir de la información disponible sobre los elementos de un conjunto finito de objetos O , el objetivo es construir una aplicación $F: O \rightarrow R^k$, tal que las distancias entre las imágenes de dos unidades experimentales sean tan próxima como sea posible a la desemejanza entre cada par de unidades experimentales.

El carácter multiobjetivo de este problema procede de dos vertientes:

- (i) El que se pueda definir más de una desemejanza sobre el conjunto de objetos O .
- (ii) El hecho de poder considerar tantas funciones objetivo como valores diferentes tenga la desemejanza considerada.

Este capítulo se desarrolla siguiendo los siguientes apartados. A continuación de esta introducción, en el segundo epígrafe, se precisa la formulación fundamental del

problema. En el tercer epígrafe, se estudia el problema multiobjetivo para una sola desemejanza y se diseña una técnica para su resolución. En el cuarto epígrafe, se considera el problema multiobjetivo para más de una desemejanza, y se indican técnicas para su resolución. Finalmente, en el quinto epígrafe, se aplican las técnicas estudiadas a dos problemas concretos.

4.2. Formulación del problema

Sea O un conjunto finito de objetos. Se supone que se tienen definidos sobre O , k coeficientes de desemejanza $D_1, D_2, \dots, D_r, \dots, D_k$. El problema consiste en construir una función F sobre O , con valores en R , o en R^k , de tal forma que aquellos objetos que tengan entre sí desemejanzas pequeñas, tengan imágenes próximas sobre R , o sobre R^k , según la función F .

Un *coeficiente de desemejanza* definido sobre O , es una función D definida sobre $O \times O$, con valores en los números reales no negativos,

$$D: O \times O \rightarrow R^+$$

que satisface los dos axiomas siguientes:

(A₁) Para todo $o \in O$, se debe verificar que $D(o, o) = 0$,

(A₂) Para todo par $o_i, o_j \in O \times O$, se debe verificar que $D(o_i, o_j) = D(o_j, o_i)$.

Si el coeficiente de desemejanza cumple otras propiedades adicionales, recibe otras denominaciones. Entre ellas las más importantes son las siguientes:

Cuando además se verifica la desigualdad triangular

(A₃) Para toda terna $o_i, o_j, o_s \in O \times O$, se verifica

$$D(o_i, o_j) \leq D(o_i, o_s) + D(o_s, o_j),$$

el coeficiente de desemejanza se denomina una *distancia*.

Si la distancia es además una distancia ultramétrica, es decir,

(A₄) Para toda terna $o_i, o_j, o_s \in O \times O$, se verifica

$$D(o_i, o_j) \leq \max\{D(o_i, o_s), D(o_s, o_j)\},$$

el coeficiente de desemejanza se denomina una *ultramétrica*.

En todo este capítulo, se supone que el conjunto O tiene N objetos. La formulación matemática del problema multiobjetivo que se considera, con una sola desemejanza, es la siguiente.

Hallar una función $F: O \rightarrow R$, que sea la solución óptima del problema:

$$\min_F \{ |F(o_1) - F(o_2)| - D(o_1, o_2)|, |F(o_1) - F(o_3)| - D(o_1, o_3)|, \dots, \\ |F(o_i) - F(o_j)| - D(o_i, o_j)|, \dots, |F(o_{N-1}) - F(o_N)| - D(o_{N-1}, o_N)| \}.$$

En el caso de considerar más de una desemejanza, la formulación del problema multiobjetivo es la siguiente.

Hallar una función $F: O \rightarrow R$, que sea la solución óptima del problema:

$$\min_F \min_{1 \leq r \leq k} \{ |F(o_1) - F(o_2)| - D_r(o_1, o_2)|, |F(o_1) - F(o_3)| - D_r(o_1, o_3)|, \dots, \\ |F(o_i) - F(o_j)| - D_r(o_i, o_j)|, \dots, |F(o_{N-1}) - F(o_N)| - D_r(o_{N-1}, o_N)| \}.$$

4.3. Planteamiento y resolución del problema con una sola desemejanza

Sea O un conjunto con N objetos, $O = \{o_1, o_2, \dots, o_N\}$. Se supone que sobre O se tiene definido un coeficiente de desemejanza D . El problema multiobjetivo consiste en hallar una función X , definida sobre O y con valores en los números reales no negativos R^+ ,

$$X: O \rightarrow R^+$$

que resuelva el siguiente problema multiobjetivo:

$$\min_X \{ |X(o_i) - X(o_j)| - D(o_i, o_j)| \mid 1 \leq i \leq j \leq N \}.$$

De lo dicho previamente, cada función X se puede identificar con N números no negativos $x_1, x_2, \dots, x_r, \dots, x_N$. Estos N números no negativos, representan los valores que se atribuyen a los N objetos. Por tanto, en este problema multiobjetivo así formulado, los objetos del problema multiobjetivo, se identifican con las funciones X .

Sea, para $i < j$, la característica: $A(x_i, x_j) = |x_i - x_j| - D(o_i, o_j)|$.

El número de características de este problema multiobjetivo es $N(N-1)/2$. Se ordenan linealmente estas características, de tal forma que la característica relativa a los objetos o_i y o_j , con $i < j$, ocupa en el orden lineal el número de orden:

$$N_{ij} = (N-1) + (N-2) + \dots + (N-(i-1)) + j - i.$$

Entre las propiedades que cumple esta función $A(x_i, x_j)$, se pueden destacar las siguientes:

(P_1) Los valores de las características son invariantes *por traslación de la función X* :

$$A(x_i, x_j) = \left| |x_i - x_j| - D(o_i, o_j) \right| = \left| |(x_i + k) - (x_j + k)| - D(o_i, o_j) \right|.$$

(P₂) Es invariante por oposición.

Se supone que: $\min\{X(o)|o \in O\} = 0$ y $\max\{X(o)|o \in O\} = M$. La función \bar{X} , opuesta de X , se define como: $\bar{X}(o) = M - X(o)$, y es tal que:

$$|\bar{X}(o_i) - \bar{X}(o_j)| = \left| (M - X(o_i)) - (M - X(o_j)) \right| = |X(o_i) - X(o_j)|.$$

(P₃) Supuesto que $D(o_i, o_j) > 0$, fijado x_i (o x_j), cada función

$$A(x_i, x_j) = \left| |x_i - x_j| - D(o_i, o_j) \right|$$

no es convexa, teniendo dos mínimos y un máximo relativos. Además los mínimos relativos son mínimos absolutos.

Sin pérdida de generalidad, se supone que se fija x_i . Si se toma $\bar{x}_j = x_i + D(o_i, o_j)$, entonces $A(x_i, \bar{x}_j) = 0$, y si se toma $\bar{\bar{x}}_j = x_i - D(o_i, o_j)$, entonces $A(x_i, \bar{\bar{x}}_j) = 0$. Además, si se toma $\tilde{x}_j = x_i$, $A(x_i, \tilde{x}_j) = D(o_i, o_j)$, que es un máximo relativo en el intervalo $[\bar{\bar{x}}_j, \bar{x}_j]$. Por tanto, la función no es convexa.

De las propiedades anteriores, se infiere que el problema multiobjetivo no se puede resolver por el método de las ponderaciones, y necesita ser resuelto mediante la métrica L_∞ .

4.3.1. Planteamiento del Problema

Sea $O = \{1, 2, \dots, j, \dots, N\}$ un conjunto de N objetos. Se supone que los objetos están ordenados en el orden natural: $1, 2, \dots, j, \dots, N$, y que sobre los objetos de O hay definida una desemejanza D ; por tanto, en todo lo que sigue se considera definido el par (O, D) . El problema multiobjetivo para este orden de los objetos, consiste en asignar valores no negativos a los objetos: $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_N$, es decir, definir una función:

$$X: O \rightarrow R^+$$

(denotando $X_j = X(j)$), de tal forma que el máximo de los valores absolutos de las diferencias entre, la diferencia de cada par de valores y la verdadera desemejanza entre los correspondientes objetos, sea mínimo.

El problema se puede formular matemáticamente en los siguientes términos:

$$\begin{aligned} & \min t \\ \text{sujeto a: } & |X_j - X_i - D(i, j)| \leq t, \text{ para } 1 \leq i \leq j \leq N \\ & X_j \geq X_i, \quad \text{para } 1 \leq i \leq j \leq N \\ & X_1 = 0, X_j \geq 0, \text{ para } 1 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

4.3.2. Resolución del Problema

Definición 4.3.2.1. Dado el par (O, D) , una *linealización* es una función:

$$X: O \rightarrow R^+$$

(denotando $X_j = X(j)$), tal que $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_j, \dots \leq X_N$. Por tanto, construir una linealización X , es equivalente a determinar N números $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_N$, tales que $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_j, \dots \leq X_N$. Para cada par de objetos i, j , con $i < j$, se llama *error de X para i, j* , al valor:

$$E((i, j)/X) = |X_j - X_i - D(i, j)|.$$

Proposición 4.3.2.1. . La función de error E para X es invariante por traslación.

Definición 4.3.2.2. Se denomina *error de la linealización X para el par (O, D)* , al valor

$$E(X) = \max\{E((i, j)/X) \mid i < j\}.$$

La linealización L es *óptima para el par (O, D)* , cuando para toda función linealización X se verifica $E(L) \leq E(X)$

Teorema 4.3.2.2. Sea $X(j) = X_j$, para $1 \leq j \leq N$. Si los valores X_j , para $1 \leq j \leq N$, resuelven el siguiente programa lineal; entonces $E(X) = t_0$, donde t_0 es el óptimo del programa

$$\text{Min } t$$

$$\text{Sujeto a: } X_j - X_i - D(i, j) + E_{ij}^+ - E_{ij}^- = 0 \quad \text{para } 1 \leq i < j \leq N$$

$$X_j \geq X_i, \quad \text{para } 1 \leq i \leq j \leq N$$

$$X_1 = 0, \quad X_j \geq 0, \quad \text{para } 1 < j \leq N$$

$$0 \leq E_{ij}^+ \leq t \quad \text{y} \quad 0 \leq E_{ij}^- \leq t \quad \text{para } 1 \leq i < j \leq N.$$

Demostración. Es consecuencia de que, para todo $i < j$, $|(X_j - X_i) - D(i, j)| \leq t_0$, y de que la igualdad se alcanza para al menos un par (i, j) .

A continuación, se estudia el problema cuando los objetos están ordenados y la desemejanza cumple la propiedad de ser el par (O, D) *naturalmente ordenable*; obteniéndose resultados que ponen de relieve la importancia del camino de máximo error en la obtención de la solución del problema.

Definición 4.3.2.3. Se dice que el par (O, D) es *naturalmente ordenable* para el orden natural de O , cuando para todo triple i, j, k , tal que $i < j < k$, se verifica:

$$D(i, j) + D(j, k) \geq D(i, k) \geq \max\{D(i, j), D(j, k)\}.$$

El par (O, D) es *ordenable*, cuando existe un orden de los objetos de O para el cual, tomando este orden como natural, el par (O, D) es naturalmente ordenable.

Teorema 4.3.2.3. Sea el par (O, D) naturalmente ordenable. Sea

$$1 \leq i = i_1 < i_2 < \dots < i_p < \dots < i_r = k \leq N, \quad \text{y} \quad 1 \leq i = j_1 < j_2 < \dots < j_q < \dots < j_s = k \leq N.$$

Si para todo j_q , $1 \leq q \leq s$, existe un i_p , $1 \leq p \leq r$, tal que $j_q = i_p$, entonces se verifica:

$$D(i, i_2) + \dots + D(i_{p-1}, i_p) + \dots + D(i_{r-1}, i_r) \geq D(i, j_2) + \dots + D(j_{q-1}, j_p) + \dots + D(j_{s-1}, j_s) \geq D(i, k).$$

Demostración. Es consecuencia de que, si $j_{q-1} = i_u$ y $j_q = i_v$, para $1 \leq q \leq s$, entonces:

$$D(i_u, i_{u+1}) + \dots + D(i_{p-1}, i_p) + \dots + D(i_{v-1}, i_v) \geq D(i_u, i_v) = D(j_{q-1}, j_q).$$

De la suma en q para $1 \leq q \leq s$, se obtiene el resultado.

Teorema 4.3.2.4. Si el par (O, D) es naturalmente ordenable, entonces para todo i , $1 \leq i < N$, la función $D(i, j)$ es no decreciente en j .

Demostración. Para $i < j < k$, se verifica que $D(i, k) \geq \text{Max}\{D(i, j), D(j, k)\}$; y por tanto, se obtiene que $D(i, k) \geq D(i, j)$.

Teorema 4.3.2.5. Si el par (O, D) es naturalmente ordenable, entonces para todo k , $1 < k \leq N$, la función $D(j, k)$, $1 \leq j < k$, es no creciente en j .

Demostración. Para $k > j > i$, se verifica que $D(i, k) \geq \text{Max}\{D(i, j), D(j, k)\}$; y por tanto, $D(i, k) \geq D(j, k)$.

Sea O un conjunto de N objetos. En todo lo que sigue de este epígrafe, se supone que sobre los pares de objetos del conjunto O está definida una desemejanza D , de forma que el par (O, D) es naturalmente ordenable.

Definición 4.3.2.4. Para cada triple $s < t < v$, sea $EX(s, t, v) = D(s, t) + D(t, v) - D(s, v)$. La función EX se llama *exceso del triple* (s, t, v) . Se denomina *triple marcado* al triple $i < j < k$, tal que maximiza la función EX .

Definición 4.3.2.5. Se llama *Error* del triple s, t, v , ($s < t < v$) al valor $EE(s, t, v)$ definido por:

$$EE(s, t, v) = EX(s, t, v)/3.$$

Teorema 4.3.2.6. Sea $O = \{1, 2, 3\}$ y D una desemejanza tal que el par (O, D) es naturalmente ordenable. La función linealizante L es óptima, cuando se define:

$$L(1) = 0; L(2) = D(1, 2) - EE(1, 2, 3), \text{ y } L(3) = L(2) + D(2, 3) - EE(1, 2, 3).$$

Además $L(3) = D(1, 3) + EE(1, 2, 3)$.

Demostración. Se pueba en primer lugar la segunda parte del teorema. Puesto que

$$\begin{aligned} U(3) &= U(2) + D(2, 3) - EE(1, 2, 3) = D(1, 2) + D(2, 3) - EE(1, 2, 3) - EE(1, 2, 3) = \\ &= D(1, 3) + EE(1, 2, 3). \end{aligned}$$

Sea L una linealización tal que $L(1) = 0$ y $L \neq U$. Pueden darse dos casos:

(1) $L(2) = U(2)$ o (2) $L(2) \neq U(2)$. En el caso (1), $L(3) \neq U(3)$, puede ocurrir:

(a) $L(3) < U(3)$, $D(2, 3) - (U(3) - U(2)) = EE(1, 2, 3) < D(2, 3) - (L(3) - L(2))$ o

(b) $L(3) > U(3)$, en cuyo caso $U(3) - U(1) - D(1, 3) = EE(1, 2, 3) < L(3) - L(2) - D(1, 3)$.

En ambos supuestos L es peor que U . La demostración en el caso (2) es similar al caso (1). Por tanto, si $L \neq U$, L es peor que U , y como consecuencia U es óptima.

Definición 4.3.2.6. Sean $j, k, j < k$, dos objetos de O . Un camino C , de longitud $s, s \leq k-j$, entre j y k , es una sucesión de objetos $i_0, i_1, \dots, i_r, \dots, i_s$ de O , tales que

$$j = i_0 < i_1 < \dots < i_r < \dots < i_s = k.$$

La longitud de C es igual al número k de arcos de C . Se llama *Error del camino C* al valor

$$EE(C) = \frac{\left[\sum_{j=1}^s D(i_{j-1}, i_j) \right] - D(i_0, i_s)}{s+1}.$$

Definición 4.3.2.7. Se llama *Error del par de objetos j, k* , al valor:

$$Q(j, k) = \text{Max}(EE(C) / C \text{ es un camino entre } j \text{ y } k).$$

Teorema 4.3.2.7. Sea D una desemejanza tal que el par (O, D) es naturalmente ordenable, y $C_0 = \{j = i_0 < i_1 < \dots < i_r < \dots < i_s = k\}$, el camino entre j y k tal que $Q(j, k) = EE(C_0)$. Si se define la función linealizante X sobre los puntos del camino C_0 como $X(j) = X_0$, y por inducción, para $j < r \leq k$,

$$X(i_r) = X(i_{r-1}) + D(i_{r-1}, i_r) - EE(C_0),$$

$$\text{entonces} \quad X(i_s) = X_0 + D(i_0, i_s) + EE(C_0).$$

Además, cuando para cualquier camino C de i_t a i_u , para $j \leq i_t < i_u \leq k$, y $t+2 \leq u$; es $EE(C) = EE(C_0)$, entonces se verifica que:

$$|X(i_u) - X(i_t) - D(i_t, i_u)| = EE(C_0).$$

Demostración. La prueba de la primera parte del teorema es la siguiente:

$$\begin{aligned} L(i_s) &= X_0 + D(i_1, i_2) + D(i_2, i_3) + \dots + D(i_{s-1}, i_s) - (s-1) EE(C_0) = \\ &= X_0 + D(i_1, i_s) + EE(C_0). \end{aligned}$$

La prueba de la segunda parte es:

$$\begin{aligned} &|L(i_u) - L(i_t) - D(i_t, i_u)| = \\ &|X_0 + D(i_1, i_2) + \dots + D(i_{t-1}, i_t) + \dots + D(i_{u-1}, i_u) - (u-1) EE(C_0) - \\ &X_0 - D(i_1, i_2) - \dots - D(i_{t-1}, i_t) + (t-1) EE(C_0) - D(i_t, i_u)| \\ &= |D(i_t, i_{t+1}) + \dots + D(i_{u-1}, i_u) - D(i_t, i_u) - (u-t) EE(C_0)| = \\ &(u-t+1) EE(C_0) - (u-t) EE(C_0) = EE(C_0). \end{aligned}$$

Corolario 4.3.2.8. Si $Q(1, n) = Q(i, j)$ para todo $1 \leq i < j \leq n$, $i + 2 \leq j$, entonces la función linealizante X , definida como: $X(1) = 0$, y por inducción, para $1 < j \leq n$,

$$X(j) = X(j-1) + D(j-1, j) - Q(1, n),$$

es óptima.

Demostración. Es una consecuencia directa del teorema.

Cuando se cumple la hipótesis del corolario es fácil y elegante, hallar la función linealizante óptima. En lo que sigue, se analiza el problema en el caso de que no se cumpla dicha hipótesis.

Teorema 4.3.2.9. Sea E_N el error del camino $1, 2, \dots, N$. Si E_N es el máximo error entre los errores de todos los caminos, es decir,

$$E_N = \text{Max}\{Q(j, k) / 1 \leq j < k \leq N\},$$

entonces la función $X: O \rightarrow R^+$, definida por

$$X(1) = 0, \quad X(j) = X(j-1) + D(j-1, j) - E_N \quad \text{para } j = 2, \dots, N,$$

es la solución óptima del problema.

Demostración. De la definición de X se tiene

$$|X(j) - X(j-1) - D(j-1, j)| = E_N \quad \text{para } j = 2, \dots, N.$$

Para demostrar el teorema por reducción al absurdo se supone la existencia de algún arco (i, j) tal que

$$|X(j) - X(i) - D(i, j)| = E_{ij} > E_N,$$

distinguiéndose dos posibilidades.

i) $X(j) - X(i) > D(i, j)$, siendo $j = i + k$. En este caso se demuestra que el camino $P_{ij} \equiv i, i+1, \dots, i+k-1, j$ tiene error mayor que E_N , contradiciendo la hipótesis.

$$E_{ij} = \sum_{s=1}^k [X(i+s) - X(i+s-1)] - D(i, j) = \sum_{s=1}^k [D(i+s-1, i+s) - E_N] - D(i, j)$$

por tanto,

$$\sum_{s=1}^k [D(i+s-1, i+s)] - D(i, j) = k E_N + E_{ij} > (k+1) E_N.$$

Dividiendo por $k+1$, se obtiene el resultado deseado:

$$EE(P_{ij}) = \frac{1}{k+1} \left[\sum_{s=1}^k [D(i+s-1, i+s)] - D(i, j) \right] = \frac{1}{k+1} [k E_N + E_{ij}] > E_N.$$

ii) $X(j) - X(i) < D(i, j)$, siendo $j = i + k$. En este caso se demuestra que el camino $\bar{P}_{ij} \equiv 1, 2, \dots, i-1, i, j, j+1, \dots, N$ tiene error mayor que E_N , contradiciendo la hipótesis.

$$E_{ij} = D(i, j) - \sum_{s=1}^k [X(i+s) - X(i+s-1)] = D(i, j) - \sum_{s=1}^k [D(i+s-1, i+s) - E_N]$$

por tanto,

$$\sum_{s=1}^k [D(i+s-1, i+s)] - D(i, j) = k E_N - E_{ij}.$$

Puesto que

$$N E_N = \sum_{s=2}^N [D(s-1, s)] - D(1, N),$$

se obtiene

$$\sum_{s=1}^{i-1} [D(s, s+1)] + D(i, j) + \sum_{s=j}^{N-1} [D(s, s+1)] - D(1, N) = N E_N - k E_N + E_{ij} = (N-k) E_N + E_{ij}.$$

Dividiendo por $N-k+1$, se obtiene el resultado deseado:

$$EE(\bar{P}_{ij}) = \frac{1}{N-k+1} [(N-k) E_N + E_{ij}] > E_N.$$

Corolario 4.3.2.10. Sea $P \equiv i_1, i_2, \dots, i_k$, el camino de máximo error, EE , para el problema definido por el par ordenable (O, D) , $(\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, N\})$. Para cada par de vértices, $i_p < i_q$, perteneciente a P se verifica:

$$|X(i_q) - X(i_p) - D(i_p, i_q)| \leq EE.$$

Demostración. Se aplica el teorema 4.3.2.9. al problema obtenido mediante la restricción de (O, D) , al conjunto de objetos $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

Teorema 4.3.2.11. Sea $P \equiv i_1, i_2, \dots, i_k$, el camino de máximo error, EE , para el problema definido por el par ordenable (O, D) , $(\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, N\})$. Para cada vértice s , $i_p < s < i_{p+1}$, no perteneciente a P se definen:

$$Y(s, i_r) = X(i_r) + D(i_r, s) \quad \text{para } 1 \leq r \leq p,$$

$$Y(s, i_r) = X(i_r) - D(s, i_r) \quad \text{para } p+1 \leq r \leq k,$$

$$Z(s, 1) = Y(s, j) = \text{Min } \{Y(s, i_r) | 1 \leq r \leq k\},$$

$$Z(s, 2) = Y(s, l) = \text{Max } \{Y(s, i_r) | 1 \leq r \leq k\}.$$

Si se supone que

$$\frac{Z(s,2) - Z(s,1)}{2} \geq EE,$$

se pueden presentar únicamente tres casos: i) $j < l < s$, ii) $s < j < l$, iii) $l < s < j$.

Demostración. i) En el caso de que $j < s$ y $l < s$, debe ser $j < l$. Puesto que si se supone $l < j$, se tiene

$$Z(s,2) - Z(s,1) = Y(s,l) - Y(s,j) = X(l) - X(j) + D(l,s) - D(j,s) \leq$$

$$X(l) - X(j) + D(l,j) \leq X(l) - X(j) + [X(j) - X(l) + EE] = EE$$

llegando a contradicción. La primera desigualdad se verifica por ser ordenable la desemejanza y la segunda por el corolario 4.3.2.10.

ii) En el caso de que $s < j$ y $s < l$, debe ser $j < l$. Puesto que si se supone $l < j$, se tiene

$$Z(s,2) - Z(s,1) = Y(s,l) - Y(s,j) = X(l) - X(j) + D(s,j) - D(s,l) \leq$$

$$X(l) - X(j) + D(l,j) \leq X(l) - X(j) + [X(j) - X(l) + EE] = EE$$

llegando a contradicción.

iii) En el caso de que no se cumplan las condiciones i) o ii), debe ser $l < s < j$. Puesto que si se supone $j < s < l$, se tiene

$$Z(s,2) - Z(s,1) = Y(s,l) - Y(s,j) = X(l) - X(j) - D(s,l) - D(j,s) \leq$$

$$X(l) - X(j) - D(j,l) \leq X(l) - X(j) - [X(l) - X(j) - EE] = EE$$

llegando a contradicción.

Teorema 4.3.2.12. Sea $P \equiv i_1, i_2, \dots, i_k$, el camino de máximo error, EE , para el problema definido por el par ordenable (O, D) , $(\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, N\})$. Para todo vértice s , no perteneciente a P , se verifica:

$$\frac{Z(s,2) - Z(s,1)}{2} \leq EE.$$

Demostración. Se demuestra el resultado por reducción al absurdo. Se consideran los tres casos que pueden presentarse, establecidos por el Teorema 4.3.2.11.

i) $j < l < s$, siendo

$$Y(s, j) = Z(s,1) = \text{Min} \{Y(i_r) \mid 1 \leq r \leq k\}, \quad Y(s, l) = Z(s,2) = \text{Max} \{Y(i_r) \mid 1 \leq r \leq k\}.$$

Si se supone que

$$\frac{Z(s,2) - Z(s,1)}{2} > EE,$$

entonces el camino $j = i_t, i_{t+1}, \dots, i_{t+u} = l, s$, tiene error mayor que EE , puesto que se verifica:

$$X(l) = X(j) + \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) - u EE,$$

$$Y(s, l) - Y(s, j) = \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) + D(l, s) - D(j, s) - u EE > 2EE,$$

$$\frac{1}{u+2} \left[\sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) + D(l, s) - D(j, s) \right] > EE.$$

ii) $s < j < l$, siendo

$$Y(s, j) = Z(s, 1) = \min \{Y(i_r) \mid 1 \leq r \leq k\}, \quad Y(s, l) = Z(s, 2) = \max \{Y(i_r) \mid 1 \leq r \leq k\}.$$

Si se supone que

$$\frac{Z(s,2) - Z(s,1)}{2} > EE,$$

entonces el camino $s, j = i_t, i_{t+1}, \dots, i_{t+u} = l$, tiene error mayor que EE , puesto que se verifica:

$$X(l) = X(j) + \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) - u EE,$$

$$Y(s, l) - Y(s, j) = \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) + D(s, j) - D(s, l) - u EE > 2EE,$$

$$\frac{1}{u+2} \left[\sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) + D(s, j) - D(s, l) \right] > EE.$$

iii) $l < s < j$, siendo

$$Y(s, j) = Z(s, 1) = \min \{Y(i_r) \mid 1 \leq r \leq k\}, \quad Y(s, l) = Z(s, 2) = \max \{Y(i_r) \mid 1 \leq r \leq k\}.$$

Si se supone que

$$\frac{Z(s,2) - Z(s,1)}{2} > EE,$$

entonces el camino $i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, l = i_t, s, j = i_{t+u}, i_{t+u+1}, \dots, i_{k-1}, i_k$, tiene error mayor que EE , puesto que se verifica:

$$X(j) = X(l) + \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) - u EE,$$

$$Y(s, l) - Y(s, j) = D(l, s) - \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) + D(s, j) + u EE > 2EE,$$

$$D(l, s) + D(s, j) - \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) > (2 - u)EE$$

$$\frac{1}{k} \left[\sum_{v=1}^{k-1} D(i_v, i_{v+1}) - D(i_1, i_k) \right] = EE$$

$$\sum_{v=1}^{t-1} D(i_v, i_{v+1}) + D(l, s) + D(s, j) + \sum_{v=u}^{k-t-1} D(i_{t+v}, i_{t+v+1}) - D(i_1, i_k) =$$

$$\sum_{v=1}^{k-1} D(i_v, i_{v+1}) - D(i_1, i_k) + D(l, s) + D(s, j) - \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) > kEE + (2 - u)EE$$

$$\frac{1}{k - u + 2} \left[\sum_{v=1}^{t-1} D(i_v, i_{v+1}) + D(l, s) + D(s, j) + \sum_{v=u}^{k-t-1} D(i_{t+v}, i_{t+v+1}) - D(i_1, i_k) \right] > EE.$$

Teorema 4.3.2.13. Sea $P \equiv i_1, i_2, \dots, i_k$, el camino de máximo error, EE , para el problema definido por el par ordenable (O, D) , $(\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, N\})$. Sea s un vértice no perteneciente a P , verificando:

$$\frac{Z(s, 2) - Z(s, 1)}{2} = EE.$$

Entonces existe un camino de error EE que contiene el vértice s .

Demostración. Se consideran los tres casos que pueden presentarse, establecidos por el Teorema 4.3.2.11.

i) $j < l < s$, siendo

$$Z(s, 1) = Y(s, j) = Y(i_t) = \min \{Y(i_r) \mid 1 \leq r \leq k\}, \quad Z(s, 2) = Y(s, l) = Y(i_{t+u}) = \max \{Y(i_r) \mid 1 \leq r \leq k\},$$

entonces el camino $j = i_t, i_{t+1}, \dots, i_{t+u} = l, s$, tiene error EE , puesto que se verifica:

$$X(l) = X(j) + \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) - u EE,$$

$$Z(s,2) - Z(s,1) = X(l) - X(j) + D(l,s) - D(j,s) = \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) + D(l,s) - D(j,s) - u EE = 2EE.$$

Por tanto,

$$\sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) + D(l,s) - D(j,s) = (u+2)EE.$$

ii) $s < j < l$, siendo

$$Z(s,1) = Y(s, j) = Y(i_t) = \text{Min} \{Y(i_r) \mid 1 \leq r \leq k\}, \quad Z(s,2) = Y(s, l) = Y(i_{t+u}) = \text{Max} \{Y(i_r) \mid 1 \leq r \leq k\}$$

entonces el camino $s, j = i_t, i_{t+1}, \dots, i_{t+u} = l$, tiene error EE , puesto que se verifica:

$$X(l) = X(j) + \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) - u EE,$$

$$Z(s,2) - Z(s,1) = X(l) - X(j) - D(s, l) + D(s, j) = \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) - D(s, l) + D(s, j) - u EE = 2EE.$$

Por tanto,

$$\sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) + D(s, j) - D(s, l) = (u+2)EE.$$

iii) $l < s < j$, siendo

$$Z(s,1) = Y(s, j) = Y(i_{t+u}) = \text{Min} \{Y(i_r) \mid 1 \leq r \leq k\}, \quad Z(s,2) = Y(s, l) = Y(i_t) = \text{Max} \{Y(i_r) \mid 1 \leq r \leq k\},$$

entonces el camino $i_1, i_2, \dots, i_{t-1}, l = i_t, s, j = i_{t+u}, i_{t+u+1}, \dots, i_{k-1}, i_k$, tiene error EE , puesto que se verifica:

$$X(l) = X(j) - \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) + u EE,$$

$$Z(s,2) - Z(s,1) = X(l) - X(j) + D(l,s) + D(s, j) = D(l,s) + D(j,s) - \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) + u EE = 2EE.$$

Por tanto,

$$D(l,s) + D(s, j) = \sum_{v=1}^u D(i_{t+v-1}, i_{t+v}) + (2-u)EE.$$

$$\frac{1}{k-u+2} \left[\sum_{v=1}^{t-1} D(i_v, i_{v+1}) + D(l, s) + D(s, j) + \sum_{v=u}^{k-t-1} D(i_{t+v}, i_{t+v+1}) - D(i_1, i_k) \right] =$$

$$\frac{1}{k-u+2} \left[\sum_{v=1}^{k-1} D(i_v, i_{v+1}) - D(i_1, i_k) + (2-u)EE \right] = EE.$$

Teorema 4.3.2.14. Sea $P \equiv i_1, i_2, \dots, i_k$, el camino de máximo error, EE , para el problema definido por el par ordenable (O, D) , $(\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, N\})$. Sean s y t ($s < t$) dos vértices no pertenecientes a P , verificando:

$$\frac{Z(s,2) - Z(s,1)}{2} = EE \quad y \quad \frac{Z(t,2) - Z(t,1)}{2} = EE.$$

Entonces, definiendo

$$X(s) = \frac{Z(s,1) + Z(s,2)}{2} \quad y \quad X(t) = \frac{Z(t,2) + Z(t,2)}{2},$$

se verifica

$$|X(t) - X(s) - D(s,t)| \leq EE.$$

Demostración. Se clasifica cada vértice, s , no perteneciente al camino de máximo error en una de las tres clases establecidas en el Teorema 4.3.2.11.: I) $j < l < s$, II) $s < j < l$, III) $l < s < j$. Se demuestra el resultado para dos puntos arbitrarios, pertenecientes a una misma clase o pertenecientes a dos clases diferentes.

Caso 1: $j < l < s$ y $k < m < t$.

i) Supongamos $X(t) - X(s) > D(s,t) + EE$.

$$X(t) - X(j) \leq D(j,t) + EE, \quad X(s) - X(j) = D(j,s) + EE$$

$$X(t) - X(s) + D(j,s) + EE \leq D(j,t) + EE$$

$$D(s,t) < D(s,t) + EE < X(t) - X(s) \leq D(j,t) - D(j,s).$$

Por tanto $D(j,s) + D(s,t) < D(j,t)$, en contradicción con la propiedad ordenable de la desemejanza.

ii) Supongamos $X(t) - X(s) < D(s,t) - EE$. Se distinguen tres situaciones: 1) $s < k$, 2) $k \leq l$ y 3) $l < k < s$.

1)

$$D(s,k) - EE \leq X(k) - X(s), \quad X(t) - X(k) = D(k,t) + EE$$

$$D(s,k) - EE \leq X(t) - X(s) - D(k,t) - EE$$

$$D(s,k) + D(k,t) \leq X(t) - X(s) < D(s,t) - EE < D(s,t).$$

Por tanto $D(s, k) + D(k, t) < D(s, t)$, en contradicción con la propiedad ordenable de la desemejanza.

2) El camino $k = i_r, i_{r+1}, \dots, i_{r+u} = l, s, t$ tiene error mayor que EE

$$\sum_{v=1}^u D(i_{r+v-1}, i_{r+v}) + D(l, s) + D(s, t) - D(k, t) =$$

$$\sum_{v=1}^u [X(i_{r+v}) - X(i_{r+v-1})] + uEE + X(s) - X(l) + EE + D(s, t) - X(t) + X(k) + EE > (u+3)EE$$

3) Se construye un camino que tiene error mayor que EE , de forma análoga a las demostraciones previas.

Caso 2: $j < l < s$ y $t < k < m$.

i) Supongamos $X(t) - X(s) > D(s, t) + EE$.

$$X(s) - X(j) = D(j, s) + EE$$

$$X(t) - EE \leq X(j) + D(j, t) \leq X(t) + EE$$

$$X(t) - EE \leq X(s) - D(j, s) - EE + D(j, t) \leq X(t) + EE$$

$$X(t) - X(s) \leq D(j, t) - D(j, s)$$

$$D(s, t) < D(s, t) + EE < X(t) - X(s) \leq D(j, t) - D(j, s).$$

Por tanto $D(j, s) + D(s, t) < D(j, t)$, en contradicción con la propiedad ordenable de la desemejanza.

ii) Supongamos $X(t) - X(s) < D(s, t) - EE$.

El camino $i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, l = i_r, s, t, k = i_{r+u}, i_{r+u+1}, \dots, i_{k-1}, i_k$, tiene error mayor que EE , puesto que se verifica:

$$\sum_{v=1}^{r-1} D(i_v, i_{v+1}) + D(l, s) + D(s, t) + D(t, k) + \sum_{v=u}^{k-r-1} D(i_{r+v}, i_{r+v+1}) - D(i_1, i_k) >$$

$$\sum_{v=1}^{r-1} [X(i_{v+1}) - X(i_v)] + (r-1)EE + X(s) - X(l) + EE + X(t) - X(s) + EE + X(k) - X(t) + EE +$$

$$\sum_{v=u}^{k-r-1} [X(i_{r+v+1}) - X(i_{r+v})] + (k-r-u)EE - [X(i_k) - X(i_1)] + EE = (k-u+3)EE$$

Caso 3: $j < l < s$ y $m < t < k$.

i) Supongamos $X(t) - X(s) > D(s, t) + EE$.

$$X(s) - X(j) = D(j, s) + EE$$

$$D(j, t) - EE \leq X(t) - X(j) \leq D(j, t) + EE$$

$$X(t) - X(j) = X(t) - X(s) + X(s) - X(j) > D(s, t) + EE + D(j, s) + EE$$

$$D(j, s) + D(s, t) < D(j, t) - EE < D(j, t).$$

Por tanto $D(j, s) + D(s, t) < D(j, t)$, en contradicción con la propiedad ordenable de la desemejanza.

ii) Supongamos $X(t) - X(s) < D(s, t) - EE$.

Análogamente al apartado ii) del caso 2, se demuestra que el camino $i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, l = i_r, s, t, k = i_{r+u}, i_{r+u+1}, \dots, i_{k-1}, i_k$, tiene error mayor que EE .

Caso 4: $s < j < l$ y $k < m < t$.

i) Supongamos $X(t) - X(s) > D(s, t) + EE$. Se distinguen tres situaciones: 1) $m < s$ o $j > t$, 2) $s < j \leq m < t$ y 3) $s < m < j < t$.

1) Supongamos $m < s$

$$X(t) - X(m) = D(m, t) - EE$$

$$D(m, s) - EE \leq X(s) - X(m) \leq D(m, s) + EE$$

$$X(t) - X(m) = X(t) - X(s) + X(s) - X(m) > D(s, t) + EE + D(m, s) - EE$$

$$D(m, s) + D(s, t) < D(m, t) - EE < D(m, t).$$

Por tanto $D(m, s) + D(s, t) < D(m, t)$, en contradicción con la propiedad ordenable de la desemejanza. La demostración en el caso $j > t$ es análoga.

2) El camino $s, j = i_r, i_{r+1}, \dots, i_{r+u} = m, t$ tiene error mayor que EE ,

$$D(s, j) + \sum_{v=1}^u D(i_{r+v-1}, i_{r+v}) + D(m, t) - D(s, t) >$$

$$X(j) - X(s) + EE + \sum_{v=1}^u [X(i_{r+v}) - X(i_{r+v-1})] + uEE + X(t) - X(m) + EE - X(t) + X(s) + EE > (u+3)EE$$

$$\sum_{v=1}^u [X(i_{r+v}) - X(i_{r+v-1})] + uEE + X(s) - X(l) + EE + D(s, t) - X(t) + X(k) + EE > (u+3)EE$$

3) Se construye un camino que tiene error mayor que EE , de forma análoga a las demostraciones previas.

ii) Supongamos $X(t) - X(s) < D(s, t) - EE$. Se distinguen dos situaciones: 1) $s < k$ o $l < t$ y 2) $k < s < t < l$.

1) Supongamos $s < k$

$$X(t) - X(k) = D(k, t) + EE$$

$$D(s, k) - EE \leq X(k) - X(s) \leq D(s, k) + EE$$

$$X(t) - X(s) = X(t) - X(k) + X(k) - X(s) \geq D(k, t) + EE + D(s, k) - EE$$

$$D(s, k) + D(k, t) < D(s, t) - EE < D(s, t).$$

Por tanto $D(s, k) + D(k, t) < D(s, t)$, en contradicción con la propiedad ordenable de la desemejanza. La demostración en el caso $l < t$ es análoga.

2) Se construye un camino que tiene error mayor que EE , de forma análoga a las demostraciones previas.

Caso 5: $s < j < l$ y $t < k < m$.

El estudio de este caso es totalmente análogo al caso 1.

Caso 6: $s < j < l$ y $m < t < k$.

i) Supongamos $X(t) - X(s) > D(s, t) + EE$. Se distinguen tres situaciones: 1) $t < j$ o $m < s$, 2) $s < j \leq m < t$ y 3) $s < m < j < t$.

1) Se supone $t < j$,

$$X(j) - X(s) = D(s, j) - EE$$

$$D(t, j) - EE \leq X(j) - X(t) \leq D(t, j) + EE$$

$$X(j) - X(s) = X(j) - X(t) + X(t) - X(s) > D(t, j) - EE + D(s, t) + EE$$

$$D(s, t) + D(t, j) < D(s, j) - EE < D(s, j)$$

Por tanto $D(s, t) + D(t, j) < D(s, j)$ en contradicción con la propiedad ordenable de la desemejanza. La demostración en el caso $m < s$ es análoga.

2) El camino $s, j = i_r, i_{r+1}, \dots, i_{r+u} = m, t$ tiene error mayor que EE ,

$$D(s, j) + \sum_{v=1}^u D(i_{r+v-1}, i_{r+v}) + D(m, t) - D(s, t) >$$

$$X(j) - X(s) + EE + \sum_{v=1}^u [X(i_{r+v}) - X(i_{r+v-1})] + uEE + X(t) - X(m) + EE - X(t) + X(s) + EE > (u+3)EE$$

3) Se construye un camino que tiene error mayor que EE , de forma análoga a las demostraciones previas.

ii) Supongamos $X(t) - X(s) < D(s, t) - EE$. Se distinguen tres situaciones: 1) $l < t$, 2) $k \leq l$ y 3) $t < l < k$.

1)

$$X(l) - X(s) = D(s, l) + EE$$

$$D(l, t) - EE \leq X(t) - X(l) \leq D(l, t) + EE$$

$$X(t) - X(s) = X(t) - X(l) + X(l) - X(s) \geq D(l, t) - EE + D(s, l) + EE$$

$$D(s, l) + D(l, t) < D(s, t) - EE < D(s, t)$$

Por tanto $D(s, l) + D(l, t) < D(s, t)$ en contradicción con la propiedad ordenable de la desemejanza.

2) El camino $s, t, k = i_r, i_{r+1}, \dots, i_{r+u} = l$, tiene error mayor que EE

$$D(s, t) + D(t, k) + \sum_{v=1}^u D(i_{r+v-1}, i_{r+v}) - D(s, l) =$$

$$D(s, t) + X(k) - X(t) + EE + \sum_{v=1}^u [X(i_{r+v}) - X(i_{r+v-1})] + uEE - X(l) + X(s) + EE > (u+3)EE$$

3) Se construye un camino que tiene error mayor que EE , de forma análoga a las demostraciones previas.

Caso 7: $l < s < j$ y $k < m < t$.

El estudio de este caso es totalmente análogo al caso 6.

Caso 8: $l < s < j$ y $t < k < m$.

El estudio de este caso es totalmente análogo al caso 3.

Caso 9: $l < s < j$ y $m < t < k$.

i) Supongamos $X(t) - X(s) > D(s, t) + EE$. Se distinguen tres situaciones: 1) $t < j$ o $m < s$, 2) $s < j \leq m < t$ y 3) $s < m < j < t$.

Las demostraciones de las situaciones 1) y 2) son análogas a las correspondientes del caso 6 i).

3) Se construye un camino que tiene error mayor que EE , de forma análoga a las demostraciones previas.

ii) Supongamos $X(t) - X(s) < D(s, t) - EE$.

Análogamente al apartado ii) del caso 2, se demuestra que el camino $i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, j = i_r, s, t, m = i_{r+u}, i_{r+u+1}, \dots, i_{k-1}, i_k$, tiene error mayor que EE .

Algoritmo 4.3.2.

Paso 0. Considerar el camino $1, 2, \dots, N$. Sea E_N el error de dicho camino. Establecer:

$$X(1) = 0, \quad X(j) = X(j-1) + D(j-1, j) - E_N \quad \text{para } j = 2, \dots, N.$$

Paso 1. Calcular, para cada arco (i, j) que no sea un arco del camino considerado,

$$|X(j) - X(i) - D(i, j)| = E_{ij}.$$

Si, para todo arco (i, j) , es $E_{ij} \leq E_N$, PARAR, pues la solución del paso 0 es óptima; en caso contrario, ir al paso 2

Paso 2. Elegir un arco (i, j) de máximo error E_{ij} . Construir, a partir del camino *actual* y del arco (i, j) elegido, el camino que contiene el arco (i, j) y tiene error mayor que el error del camino actual, de forma análoga a la demostración del Teorema 4.3.2.14.. Utilizando las notaciones del teorema 4.3.2.11., para todo vértice s , que no pertenezca al nuevo camino considerado, que contiene el arco (i, j) , definir

$$X(s) = \frac{Z(s, 1) + Z(s, 2)}{2}.$$

Paso 3. Calcular, para cada arco (i, j) que no sea un arco del camino actual,

$$|X(j) - X(i) - D(i, j)| = E_{ij}.$$

Si, para todo arco (i, j) , es E_{ij} no superior al error del camino actual, PARAR, pues la solución del paso 2 es óptima; en caso contrario, ir al paso 2

Teorema 4.3.2.15. *El algoritmo 4.3.2., proporciona una linealización óptima, X , cuando el par (O, D) es naturalmente ordenable. Además, el algoritmo tiene complejidad $O(N^4)$.*

Demostración. La validez del algoritmo se sigue directamente de los teoremas del Teorema 4.3.2.9. al Teorema 4.3.2.14.. El paso 2 del algoritmo se ejecuta a lo sumo tantas veces como el número de arcos del dígrafo, y el trabajo de cada iteración del

algoritmo depende esencialmente del número de arcos del dígrafo; de lo que se sigue que la complejidad es $O(N^4)$.

A continuación, se aplica el anterior algoritmo a la resolución de un ejemplo.

Ejemplo 4.3.2.

Tabla de desemejanzas

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	2															
3	3	1.2														
4	4	2.4	1.5													
5	5.4	3.8	3	1.6												
6	6.5	4.7	3.5	2.8	1.5											
7	7.2	6	5	3.6	2.5	2.2										
8	8.3	7	6	4.8	3.4	3	2									
9	9.2	7.8	7	5.6	4.6	4.2	3.4	2.3								
10	10	8.7	8	6.6	5.8	5	4.4	3.2	2.4							
11	11	9.6	9	7.6	6	5.8	5.2	4.2	3.2	2.6						
12	11.7	10.4	9.5	8	7.4	6.8	6	5	4.8	4.4	4					
13	12	10.9	10	9	8	7.2	7	6	5	4.6	4.2	3				
14	12.5	11	10.5	9.5	8.5	8	7.7	6.8	6	5	4.5	3.9	3.8			
15	13	11.7	11.2	10.5	9.5	9	8.5	7.7	7	6.5	6	5	4.5	4		
16	13.2	12	11.3	10.6	9.9	9.4	8.9	8	7.8	6.9	6.3	5.4	4.7	4.3	4	
17	13.5	12.6	12	11	10.6	10	9.3	9	8.5	7.6	7	6	5	4.6	4.3	3
18	14.8	13	12.8	11.4	11	10.6	10.3	9.9	9	8	7.6	6.4	6	5	4.8	3.2
19	15.6	14	13.6	12.5	12	11	10.9	10.4	9.8	8.7	8	7.5	7	6	5	4
20	16.5	15	14.5	13.4	13	12	11.5	11.5	10	9.5	9	8	7.5	7	6	5
21	17.3	16.5	15.6	14.6	14	13	12.5	12.3	11	10.5	10	9	8.5	8	7	6
22	18.4	17.3	16.3	15	14.3	13.6	13.4	13	12.7	11.3	11	9.5	9.3	9	8.5	7.7
23	19.5	18.6	17	16	15	14	13.8	13.6	13	12.6	11.8	10.6	10	9.7	9	8
24	21	20	19	17	16.5	15.6	15	14.5	14	13	12.3	12	11	10.6	10.3	9.5
25	22	21	20	19.4	18.3	17.1	16.8	16	15.6	15	14.3	13.5	12	11	10.7	10
26	23	22	21.5	20.6	19.6	18.6	17.8	17.4	16.3	16	15.8	15.4	14.3	13.6	12.4	11.6
27	25	24.5	23.5	22.6	21.5	20.7	19.5	18.7	17.8	17.4	17	16.5	15	14.6	13.6	12.2
28	26.5	25.6	24	23.5	22.5	21.6	20	19.5	18.7	18.1	17.6	17	16.5	15.4	14.6	13.6
29	27.5	26.7	24.5	24	23.6	22.6	21	20.9	20	19.6	18.7	17.8	17.6	16.6	15.7	14.6
30	29.2	28.3	27.6	26.7	26.2	25.4	24.4	22.2	21.4	20.7	19.6	18.7	18	17.8	16.3	15.6
31	30	29.3	28.7	27.5	25.6	25.1	24.6	23.5	22.8	21.8	20.8	19.7	18.8	18.6	17.4	16.4

	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18	3.1													
19	3.8	3												
20	4.3	3.7	2.9											
21	5	4	3	2.5										
22	7	6	4	3.8	3									
23	7.6	6.8	6	5	4	3								
24	9	7.8	7.6	6.8	5.7	4	2.9							
25	9.5	8.7	8	7.6	6.7	5.6	5.1	3						
26	10.5	10.2	9.4	8.3	7.4	6.7	6.4	4.3	2.8					
27	11.4	11	10.7	9.6	8.6	7.8	7.4	6.4	4.5	3.1				
28	12.5	12	11.6	10.6	9.6	8.3	7.6	7	5.8	4.3	2.9			
29	13.6	13.4	12.5	11.5	10.7	9.7	8.7	8.2	6.5	5.4	3.4	2.7		
30	15.1	14.6	13.5	12.6	11.6	10.4	9.6	9.1	7.6	6.3	4.6	2.9	2.9	
31	15.9	14.9	14.3	13.5	12.5	11.3	10.8	10.2	8.6	7.6	6.2	4.7	3.7	2.8

El camino de máximo error es: 1, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.

Error E= 2.4125

Las puntuaciones iniciales para los vértices del camino de máximo error son:

X(1)= 0	X(11)= 8.5875	X(12)=10.1750
X(13)= 10.7625	X(14)= 12.1500	X(15)= 13.7375
X(16)= 15.3250	X(17)= 15.9125	

La solución óptima del problema es:

X(1)= 0	X(2)=1.3398	X(3)=2.000
X(4)=3.3500	X(5)=4.2680	X(6)=5.0719
X(7)=5.5266	X(8)=6.3637	X(9)= 7.3234
X(10)=7.9234	X(11)= 8.5875	X(12)= 10.1750
X(13)=10.7625	X(14)=12.1500	X(15)= 13.7375
X(16)=15.3250	X(17)=15.9125	X(18)=16.6922
X(19)=17.3719	X(20)=18.1117	X(21)=19.1281
X(22)=20.7125	X(23)=21.3562	X(24)=22.6312
X(25)=24.2281	X(26)=25.3781	X(27)=26.9543
X(28)=27.7773	X(29)=28.6656	X(30)=30.0078
X(31)=31.2709		

Tabla de errores

j	X(j)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0																
2	1.3398	0.6602															
3	2.0000	1.0000	0.5398														
4	3.3500	0.6500	0.3898	0.1500													
5	4.2680	1.1320	0.8719	0.7320	0.6820												
6	5.0719	1.4281	0.9680	0.4281	1.0781	0.6961											
7	5.5266	1.6734	1.8133	1.4734	1.4234	1.2414	1.7453										
8	6.3637	1.9363	1.9762	1.6363	1.7863	1.3043	1.7082	1.1629									
9	7.3234	1.8766	1.8164	1.6766	1.6266	1.5445	1.9484	1.6031	1.3402								
10	7.9234	2.0766	2.1164	2.0766	2.0266	2.1445	2.1484	2.0031	1.6402	1.8000							
11	8.5875	2.4125	2.3523	2.4125	2.3625	1.6805	2.2844	2.1391	1.9762	1.9359	1.9359						
12	10.1750	1.5250	1.5648	1.3250	1.1750	1.4930	1.6969	1.3516	1.1887	1.9484	2.1484	2.4125					
13	10.7625	1.2375	1.4773	1.2375	1.5875	1.5055	1.5094	1.7641	1.6012	1.5609	1.7609	2.0250	2.4125				
14	12.1500	0.3500	0.1898	0.3500	0.7000	0.6180	0.9219	1.0766	1.0137	1.1734	0.7734	0.9375	1.9250	2.4125			
15	13.7375	0.7375	0.6977	0.5375	0.1125	0.0305	0.3344	0.2891	0.3262	0.5859	0.6859	0.8500	1.4375	1.5250	2.4125		
16	15.3250	2.1250	1.9852	2.0250	1.3750	1.1570	0.8531	0.8984	0.9613	0.2016	0.5016	0.4375	0.2500	0.1375	1.1250	2.4125	
17	15.9125	2.4125	1.9727	1.9125	1.5625	1.0445	0.8406	1.0859	0.5488	0.0891	0.3891	0.3250	0.2625	0.1500	0.8375	2.1250	2.4125
18	16.6922	1.8922	2.3523	1.8922	1.9422	1.4242	1.0203	0.8656	0.4285	0.3687	0.7687	0.5047	0.1172	0.0703	0.4578	1.8453	1.8328
19	17.3719	1.7719	2.0320	1.7719	1.5219	1.1039	1.3000	0.9453	0.6082	0.2484	0.7484	0.7844	0.3031	0.3906	0.7781	1.3656	1.9531
20	18.1117	1.6117	1.7719	1.6117	1.3617	0.8437	1.0398	1.0852	0.2480	0.7883	0.6883	0.5242	0.0633	0.1508	1.0383	1.6258	2.2133
21	19.1281	1.8281	1.2883	1.5281	1.1781	0.8602	1.0563	1.1016	0.4645	0.8047	0.7047	0.5406	0.0469	0.1344	1.0219	1.6094	2.1969
22	20.7125	2.3125	2.0727	2.4125	2.3625	2.1445	2.0406	1.7859	1.3488	0.6891	1.4891	1.1250	1.0375	0.6500	0.4375	1.5250	2.3125
23	21.3563	1.8563	1.4164	2.3563	2.0063	2.0883	2.2844	2.0297	1.3926	1.0328	0.8328	0.9687	0.5812	0.5937	0.4938	1.3813	1.9688
24	22.6313	1.6313	1.2914	1.6313	2.2813	1.8633	1.9594	2.1047	1.7676	1.3078	1.7078	1.7438	0.4562	0.8687	0.1188	1.4063	2.1938
25	24.2281	2.2281	1.8883	2.2281	1.4781	1.6602	2.0563	1.9016	1.8645	1.3047	1.3047	1.3406	0.5531	1.4656	1.0781	0.2094	1.0969
26	25.3781	2.3781	2.0383	1.8781	1.4281	1.5102	1.7063	2.0516	1.6145	1.7547	1.4547	0.9906	0.1969	0.3156	0.3719	0.7594	1.5469
27	26.9543	1.9543	1.1145	1.4543	1.0043	1.1863	1.1824	1.9277	1.8906	1.8309	1.6309	1.6668	0.2793	1.1918	0.2043	0.3832	0.5707
28	27.7773	1.2773	0.8375	1.7773	0.9273	1.0094	1.1055	2.2508	1.9137	1.7539	1.7539	1.5898	0.6023	0.5148	0.2273	0.5602	1.1477
29	28.6656	1.1656	0.6258	2.1656	1.3156	0.7977	0.9937	2.1391	1.4020	1.3422	1.1422	1.3781	0.6906	0.3031	0.0844	0.7719	1.2594
30	30.0078	0.8078	0.3680	0.4078	0.0422	0.4602	0.4641	0.0813	1.4441	1.2844	1.3844	1.8203	1.1328	1.2453	0.0578	0.0297	0.9172
31	31.2709	1.2709	0.6311	0.5709	0.4209	1.4029	1.0990	1.1443	1.4072	1.1475	1.5475	1.8834	1.3959	1.7084	0.5209	0.1334	0.4541

4.4. Análisis del Problema para más de una desemejanza

Sea O un conjunto con N objetos, $O = \{o_1, o_2, \dots, o_N\}$. Se supone que sobre O se tienen definidos k coeficientes de desemejanza D_r , $1 \leq r \leq k$. Se desea hallar una función $F: O \rightarrow R$, que sea la solución óptima del problema:

$$\min_F \min_{1 \leq r \leq k} \{ |F(o_1) - F(o_2)| - D_r(o_1, o_2), |F(o_1) - F(o_3)| - D_r(o_1, o_3), \dots, \\ |F(o_i) - F(o_j)| - D_r(o_i, o_j), \dots, |F(o_{N-1}) - F(o_N)| - D_r(o_{N-1}, o_N) \}.$$

Sea

$$y^* = \max \{ D_r(o_i, o_j) \mid 1 \leq r \leq k, 1 \leq i < j \leq N \} + 1.$$

El problema se puede formular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \min t \\ \text{sueto a} \quad & y^* - A_r(x_i, x_j) \leq a_{ij} t, \quad \text{para } 1 \leq i < j \leq N, 1 \leq r \leq k; \end{aligned}$$

$$\text{donde } A_r(x_i, x_j) = | |x_i - x_j| - D_r(o_i, o_j) |.$$

Con este planteamiento, la resolución del problema es similar al caso de una sola desemejanza, aunque el proceso de cálculo resulta bastante más costoso por el aumento del número de restricciones.

Hay otros procedimientos más naturales de plantear este tipo de problemas, el problema multiobjetivo se puede formular como sigue:

$$\text{Min}_{F, 1 \leq i < j \leq N} \left\{ |F(o_i) - F(o_j)| - G(D_1(o_i, o_j), D_2(o_i, o_j), \dots, D_r(o_i, o_j), \dots, D_k(o_i, o_j)) \right\}$$

cuando las desemejanzas se sintetizan en una sola desemejanza mediante la función G .

Si se supone que $G(0, 0, \dots, 0) = 0$, y que G es una función monótona creciente en cada una de sus componentes, exigencia muy natural, se tiene que para k desemejanzas:

$$H(o_i, o_j) = G(D_1(o_i, o_j), D_2(o_i, o_j), \dots, D_r(o_i, o_j), \dots, D_k(o_i, o_j))$$

es también un coeficiente de desemejanza.

Si todos los coeficientes de desemejanza son distancias, H será también una distancia cuando G sea monótona no decreciente en todas las coordenadas. Además, cuando G es monótona en todas las coordenadas, y todas las desemejanzas son ultramétricas, que son funciones monótonas entre sí, la función H es también una ultramétrica, según se ve en el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} H(o_i, o_j) &= G(D_1(o_i, o_j), D_2(o_i, o_j), \dots, D_r(o_i, o_j), \dots, D_k(o_i, o_j)) \leq \\ \max \{ & G(\max(D_1(o_i, o_s), D_1(o_s, o_j)), \dots, \max(D_k(o_i, o_s), D_k(o_s, o_j))) \} = \end{aligned}$$

$$\max \left(G(D_1(o_i, o_s), \dots, D_k(o_i, o_s)), G(D_1(o_s, o_j), \dots, D_k(o_s, o_j)) \right) = \max\{H(o_i, o_s), H(o_s, o_j)\}.$$

Como consecuencia, con estas hipótesis, cuando todas las desemejanzas son ultramétricas, H también es una ultramétrica.

Si para cada par de objetos (o_i, o_j) se ordenan las k funciones de desemejanzas de menor a mayor, denotándose por $D_{(1)}(o_i, o_j), D_{(2)}(o_i, o_j), \dots, D_{(r)}(o_i, o_j), \dots, D_{(k)}(o_i, o_j)$; una desemejanza intermedia se puede definir por la fórmula:

$$D(o_i, o_j) = \pi_1 D_{(1)}(o_i, o_j) + \pi_2 D_{(2)}(o_i, o_j) + \dots + \pi_r D_{(r)}(o_i, o_j) + \dots + \pi_k D_{(k)}(o_i, o_j),$$

donde para los pesos $(1, 0, \dots, 0, \dots, 0)$ se obtiene el mínimo, para los pesos $(0, 0, \dots, 0, \dots, 1)$ se obtiene el máximo, para $(1/p, 1/p, \dots, 1/p, \dots, 1/p)$ se obtiene la media, para $(0.5, 0, \dots, 0, \dots, 0, 0.5)$ se obtiene la media entre el máximo y el mínimo, etc.. La media entre el máximo y el mínimo es una buena función para este tipo de problemas, por ello se recomienda usar dicha función como función G .

Con esta técnica, el problema se reduce a resolver el problema por una sola desemejanza. Por tanto, utilizándola el problema se resuelve por la técnica desarrollada en el epígrafe tercero de este capítulo.

Hay otras maneras de formular matemáticamente el problema que se ha propuesto, utilizando un solo objetivo. Entre ellas, se pueden citar las siguientes:

Formulación 1: Hallar la función F_1 de tal forma que se verifique:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left| F_1(o_i) - F_1(o_j) - \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k D_r(o_i, o_j) \right| = \min_F \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left| F(o_i) - F(o_j) - \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k D_r(o_i, o_j) \right|.$$

Formulación 2: Hallar la función F_2 de tal forma que se verifique:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \min_{1 \leq r \leq k} \left| \left(F_2(o_i) - F_2(o_j) \right) - D_r(o_i, o_j) \right| = \min_F \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \min_{1 \leq r \leq k} \left| \left(F(o_i) - F(o_j) \right) - D_r(o_i, o_j) \right|.$$

Formulación 3: Hallar la función F_3 de tal forma que se verifique:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \max_{1 \leq r \leq k} \left| \left(F_3(o_i) - F_3(o_j) \right) - D_r(o_i, o_j) \right| = \min_F \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \max_{1 \leq r \leq k} \left| \left(F(o_i) - F(o_j) \right) - D_r(o_i, o_j) \right|.$$

Formulación General: Dada una función $G: R^k \rightarrow R$; de tal forma que para todo $(y_1, y_2, \dots, y_r, \dots, y_k) \in R^k$, se verifique:

$$\text{Min } \{y_1, y_2, \dots, y_r, \dots, y_k\} \leq G(y_1, y_2, \dots, y_r, \dots, y_k) \leq \text{Max}\{y_1, y_2, \dots, y_r, \dots, y_k\}.$$

hallar la función F_G de tal forma que se verifique:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left| \left(|F_G(o_i) - F_G(o_j)| - G(D_1(o_i, o_j), D_2(o_i, o_j), \dots, D_r(o_i, o_j), \dots, D_k(o_i, o_j)) \right) \right| =$$

$$\text{Min}_F \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left| \left(|F(o_i) - F(o_j)| - G(D_1(o_i, o_j), D_2(o_i, o_j), \dots, D_r(o_i, o_j), \dots, D_k(o_i, o_j)) \right) \right|.$$

Matemáticamente son posibles otras muchas formulaciones del problema y, por lo general, con cada formulación se obtiene como solución una función F distinta.

Las funciones a optimizar en estos problemas, suelen tener muchos mínimos relativos. La solución al problema es el óptimo absoluto, que suele ser muy difícil de computar. Por todo ello, este tipo de formulación del problema, suele resultar en la práctica poco recomendable.

4.5. Aplicación a un Ejemplo

Valoración de un Equipo Profesional

Las preguntas del cuestionario que se considera, fueron diseñadas para evaluar a los componentes de determinadas profesiones. El cuestionario consta de 15 preguntas, agrupadas en cinco bloques cuyos contenidos son: *Tiempo de Espera*, *Estado de las instalaciones*, *Profesionalidad*, *Atención y Explicaciones a los Pacientes* y *Carácter Global de la Atención*. Las cuestiones 5, 8 y 13 se dedicaron a medir el *Tiempo de Espera*; la cuestión 7 se destinó a medir el *Estado de las Instalaciones*; las cuestiones 1, 3, 6, 10 y 12, se dedicaron a medir el núcleo de *Profesionalidad*; las cuestiones 2, 4, 9, 11 y 14 se dedicaron a medir el bloque de *Atención y Explicaciones a los Pacientes* y finalmente la cuestión número 15, se destinó a medir el *Carácter Global de la Atención*.

Cada persona entrevistada, contestaba a cada una de las preguntas del cuestionario en una escala de 1 a 5. Si se denota por $C_i(P_j)$ la puntuación dada por la unidad experimental P_j a la cuestión C_i , el conjunto total de datos obtenidos se puede representar por: $\{C_i(P_j) / i = 1, 2, 3, \dots, n_c \text{ y } j = 1, 2, 3, \dots, n\}$; siendo n_c el número de cuestiones que componen el cuestionario y n el tamaño de la muestra.

A continuación se presenta la tabla de desemejanzas entre las preguntas.

Tabla de desemejanzas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	0.619													
3	0.631	0.282												
4	0.686	0.295	0.320											
5	0.695	0.400	0.408	0.371										
6	0.577	0.337	0.265	0.346	0.413									
7	0.643	0.378	0.24	0.408	0.367	0.429								
8	0.573	0.330	0.333	0.388	0.388	0.284	0.323							
9	0.548	0.298	0.291	0.337	0.365	0.311	0.268	0.235						
10	0.600	0.343	0.330	0.352	0.457	0.327	0.408	0.262	0.231					
11	0.371	0.514	0.505	0.524	0.533	0.413	0.459	0.388	0.385	0.476				
12	0.606	0.462	0.343	0.442	0.490	0.282	0.371	0.373	0.359	0.346	0.442			
13	0.808	0.721	0.667	0.702	0.769	0.573	0.680	0.667	0.680	0.606	0.721	0.567		
14	0.905	1.048	0.903	1.038	1.048	0.904	1.092	1.000	0.981	1.029	0.971	0.962	0.856	
15	1.196	1.108	1.110	1.147	1.186	1.129	1.011	1.140	1.139	1.088	1.088	1.020	0.6467	1.010

La desemejanza entre las cuestiones C_i y C_s , se define por la fórmula:

$$DES(i, s) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |C_i(P_j) - C_s(P_j)|.$$

El problema se plantea por programación multiobjetivo. La técnica que se emplea en su resolución es la desarrollada en el tercer epígrafe.

El orden de las preguntas es:

7, 1, 6, 4, 3, 14, 2, 11, 9, 12, 10, 15, 13, 5, 8.

Para su resolución se ha identificado cada pregunta con el orden natural 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15. Al finalizar el proceso trasladaremos la puntuación a cada una de las cuestiones.

Camino de máximo error: 1, 5, 11, 13, 14, 15 con E= 0.4365

La solución óptima al problema es:

X(1) = 0	X(2)=0.2498	X(3)=0.2583	X(4)= 0.2585
X(5)= 0.2585	X(6)=0.2602	X(7)= 0.2779	X(8)=0.2831
X(9)=0.2863	X(10)= 0.2973	X(11)= 0.3550	X(12)= 0.4348
X(13)= 0.6395	X(14)=1.0590	X(15)=1.6325	

La solución al problema con la traslación correspondiente es:

X(7) = 0	X(1)= 0.2498	X(6)= 0.2583	X(4)=0.2585
X(3)=0.2585	X(14)=0.2602	X(2)=0.2779	X(11)=0.2831
X(9)= 0.2863	X(12)= 0.2973	X(10)= 0.3550	X(15)= 0.4348
X(13)= 0.6395	X(5)=1.0590	X(8)=1.6325	

Las diferencias significativas de valores se producen entre las cuestiones 7 y 1, las cuestiones 15 y 13, las cuestiones 13 y 5, y las cuestiones 5 y 8. Con esta información, los cinco *clusters* que se obtienen son:

$$\{7\}, \{1, 6, 4, 3, 14, 2, 11, 9, 12, 10, 15\}, \{13\}, \{5\}, \{8\}.$$

El primer cluster coincide con la cuestión destinada al tema de *Estado de las Instalaciones*. En el segundo cluster, se unen las diez cuestiones destinadas a los temas dedicados a la Competencia Profesional, que ha agrupado los dos temas de *Profesionalidad y Atención* y *Explicaciones a los Pacientes*; junto con la cuestión que se dedica a la *Valoración Global*. Finalmente, las tres cuestiones destinadas al *Tiempo de Espera* de los pacientes se clasifican en tres clusters contiguos. Esto significa, que estas tres cuestiones miden puntos de vista diferentes sobre la interpretación que los pacientes dan a los tiempos de espera. También explica la gran variabilidad de las respuestas de los pacientes a las cuestiones sobre tiempo de espera.

Tabla de Errores

j	X(j)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0														
2	0.2498	0.369													
3	0.2583	0.372	0.273												
4	0.2585	0.427	0.286	0.319											
5	0.2585	0.4365	0.391	0.407	0.371										
6	0.2602	0.316	0.326	0.263	0.344	0.411									
7	0.2799	0.363	0.347	0.218	0.386	0.345	0.409								
8	0.2831	0.289	0.296	0.308	0.363	0.363	0.261	0.319							
9	0.2863	0.261	0.261	0.263	0.309	0.337	0.284	0.261	0.227						
10	0.2973	0.302	0.295	0.291	0.313	0.418	0.289	0.390	0.247	0.22					
11	0.3550	0.016	0.408	0.408	0.427	0.4365	0.318	0.383	0.316	0.316	0.418				
12	0.4348	0.171	0.277	0.166	0.265	0.313	0.107	0.216	0.221	0.210	0.208	0.362			
13	0.6395	0.168	0.331	0.285	0.321	0.129	0.193	0.320	0.310	0.326	0.263	0.4365	0.362		
14	1.0590	0.154	0.238	0.102	0.237	0.247	0.105	0.312	0.224	0.208	0.267	0.267	0.337	0.4365	
15	1.6325	0.4365	0.274	0.264	0.227	0.188	0.243	0.341	0.209	0.207	0.247	0.189	0.177	0.347	0.4365

RESUMEN

INTRODUCCIÓN

En este trabajo, se realiza una presentación unificada de la Programación Multiobjetivo, describiendo y relacionando los distintos conceptos de solución y exponiendo las distintas técnicas de solución.

Se formula el problema multiobjetivo mediante una séxtupla, (O, V, X, f, Y, EP) , que permite unificar los muy diversos problemas multiobjetivo que surgen en distintos ámbitos. O representa el conjunto de objetos inicial, V representa el conjunto de las características relevantes que se miden sobre los objetos, X es el espacio de alternativas, f representa la familia de objetivos, Y es el espacio de resultados y EP es la estructura de preferencias del decisor. A partir de esta formulación, se realiza un amplio estudio de los distintos problemas multiobjetivo.

Además, se aplica la metodología multiobjetivo a dos problemas concretos de gran interés práctico. En primer lugar, se aborda el problema de seleccionar el mejor tratamiento, cuando sobre las unidades experimentales, elegidas de forma aleatoria, se observan varias variables respuesta. Se consideran Modelos Discretos, Modelos Continuos Paramétricos y Modelos No Paramétricos.

El último capítulo del trabajo, se dedica al estudio del problema multiobjetivo que se presenta cuando se desea representar, un conjunto finito de objetos, sobre la recta real, de forma que se refleje, lo más fielmente posible, la desemejanza de cada par de objetos. En el caso de que la desemejanza cumpla la propiedad de ser *naturalmente ordenable*, se ha diseñado y programado, un algoritmo, en tiempo polinomial, que obtiene la solución óptima del problema.

OBJETIVOS

Presentar una visión amplia, sintética y unificada, de la Programación Multiobjetivo. Estudiar el problema de selección del mejor tratamiento, a partir de datos obtenidos por diseño de experimentos, con un enfoque multiobjetivo. Finalmente, estudiar el problema multiobjetivo de representación sobre la recta real de un conjunto de objetos, sobre el que está definida una desemejanza y resolver el problema en situaciones concretas.

RESULTADOS

En los dos primeros capítulos del trabajo, se presenta de forma amplia y unificada, los aspectos relevantes de la Programación Multiobjetivo. En el tercer capítulo, se estudia el problema multiobjetivo de selección del mejor tratamiento, exponiendo técnicas originales de resolución del problema. En el cuarto capítulo, se ha diseñado y programado en Matlab, un algoritmo, en tiempo polinomial, que, en determinadas situaciones, resuelve el problema multiobjetivo de representación sobre la recta real de un conjunto de objetos, sobre el que está definida una desemejanza.

CONCLUSIONES

En el trabajo se pone de manifiesto la gran importancia del enfoque multiobjetivo en los problemas reales, así como la enorme capacidad de adaptación de la Programación Multiobjetivo para la formulación y resolución adecuada de los distintos problemas. Se aportan técnicas originales para la resolución del problema multiobjetivo de selección del mejor tratamiento, y se resuelve, bajo determinada hipótesis, el problema multiobjetivo de representación óptima según una desemejanza. El algoritmo diseñado y programado halla la solución óptima en estos casos concretos, para cualquier número de objetos.

INTRODUCTION

In this paper, a unified presentation of Multi-objective Programming is done, describing and relating the different concepts of solution and exposing the different technical solutions.

The multi-objective problem is formulated by a sextuple, (O, V, X, f, Y, EP) , to unify the diverse multi-objective problems in different areas. O represents the set of initial objects, V represents the set of relevant characteristics that are measured on objects, X is the space of alternatives, f represents the family of objectives, Y shows results in space and EP is the structure of preferences for the decider. From this formulation, a comprehensive study of the various multi-objective problems is carried out.

Moreover, multi-objective methodology is applied to two specific problems of great practical interest. First, the problem of selecting the best treatment is dealt with, when on the experimental units, randomly chosen, several variables responses are observed. They are considered discrete models, Parametric continuous models and non-parametric.

The last chapter covers the study of the multi-objective issue presented when a set of specific objects are to be represented on the real line, in the way that the dissimilarity in each pair of objects is shown as closely as possible. In the event that the dissimilarity meets the property of being naturally sortable, an algorithm, in polynomial time, has been designed and programmed, which means the optimal solution to the problem.

GOALS

To present a comprehensive, concise and unified vision of the Multi-objective Programming. To study the problem of choosing the best treatment, from data obtained by experimental design, with a multi-objective approach. Finally, to study the problem of multi-objective representation on the real line of a set of objects, on which a dissimilarity is defined, and to solve the problem in specific situations.

RESULTS

In the first two chapters of the work the relevant aspects of Multi-objective Programming are presented in a comprehensive and unified manner. In the third chapter, the multi-objective problem of choosing the best treatment is studied, exposing original techniques of problem solving for discrete models, continuous models as well as parametric and non-parametric ones.

In the fourth chapter, an algorithm in polynomial time has been designed and programmed in Matlab. This sorts out the multi-objective problem of representation on the real line inside a set of objects, upon which a dissimilarity is reflected.

CONCLUSIONS

This paper states the importance of multi-objective focus on the real problems, as well as the enormous adaptability of Multi-objective Programming for the formulation and proper resolution of varied issues. Original techniques contribute to the resolution of the problem of multi-objective selection of the best treatment. Moreover, under certain assumptions, the problem of multi-objective optimal representation according to dissimilarity is resolved. The designed and programmed algorithm provides us with the optimal solution in these particular cases, for any given number of objects.

REFERENCIAS

- [1] Amartya, K. S. (1968) *Social Choice Election*. Holden Day Inc.
- [2] Ballesteros, E.; Romero, C. (1998) *Multiple Criteria Decision Making and its Applications to Economic Problems*. Kluwer.
- [3] Bell, D. E.; Keeney, R. L.; Raiffa, H. (eds.) (1978) *Conflicting Objectives in Decisions*. Wiley.
- [4] Benichou, R.E.; Santner, T. J.; Goldsman, D. M. (2003) *Design of Experiments for Statistical Selection, Screening and Multiple Comparisons*. Wiley .
- [5] Brans, J. P.; Vincke, P.; Mareschal, B. (1986) *How to select and how to rank projects: The PROMETHEE methods*. EJOR 24, 228-238.
- [6] Chankong, V.; Haimes, Y. Y. (1983) *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*. North Holland.
- [7] Coello, C. A. (2005) *Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms*. World Scientific.
- [8] Cuadras, C. M. (1981) *Métodos de Análisis Multivariante*. Eunibar.
- [9] Doumpos, M. (2002) *Multicriteria Decision Aid Classification*. Kluwer.
- [10] Fishburn, P. C. (1970) *Utility Theory for Decision Making*. Wiley.
- [11] Forman, E. H.; Selly, M. A. (2001) *Decision by Objectives*. World Scientific.

- [12] French, S.; Hartley, R.; Thomas, L. C.; White, D. J. (1983) *Multi-Objective Decision Making*. Academic Press.
- [13] Geoffrion, A. M.; Dyer, J. S.; Feinberg, A. (1972) *An interactive approach for multicriterion optimization, with application to the operation of an academic department*. Management Science 19, 4, 357-369.
- [14] Gifi, A. (1990) *Nonlinear Multivariate Analysis*. Wiley.
- [15] Hinkelmann, K.; Kempthorne, O. (1994) *Design and Analysis of Experiments*. Wiley.
- [16] Gardiner, L. R.; Steuer, R. E. (1994) *Unified interactive multiple objective programming*. EJOR 74, 391-406.
- [17] Mirkin, B. G. (1979) *Group Choice*. Wiley,
- [18] Roy, B. (1993) *Decision science or decision-aid science?*. EJOR 66, 184-203.
- [19] Sánchez, M.; Sobrón, M. I. (1997) *A necessary and suficiente condition to a Pareto optimal without optimizing the weighting criterion*. Top, 5, 2, 307-311.
- [20] Sawaragi, Y.; Nakayama, H.; Tanino, T, (1985) *Theory of Multiobjective Optimization*. Academic Press.
- [21] Shi, Y. (2001) *Multiple Criteria and Multiple Constraint Levels Lineal Programming*. World Scientific.
- [22] Shi, Y.; Zeleny, M. (eds.) (2000) *New Frontiers of Decision Making for the Information Tdchnology Era*. World Scientific.
- [23] Steuer, R. E. (1986) *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*. Wiley.

- [24] Tzeng, G. H.; Wang, H. F.; Wen, U. P.; Yu, P. L. (eds.) (1994) *Multiple Criteria Decision Making*. Springer Verlag.
- [25] Vincke, P. (1992) *Multicriteria Decision-aid*. Wiley.
- [26] YU, P. L. (1985) *Multiple-Criteria Decisión Making: Concepts, Techniques and Extensions*. Plenum Press .